SS 2018 Marc Kegel

# Kirby-Kalkül

Übungsblatt 9

**Aufgabe 1.**

(a) Die Linsenräume $L(p,q)$ und $L(p,q+np)$ sind für jede ganze Zahl $n$ orientierungserhaltend diffeomorph.

(b) Falls $qq' \equiv 1 \bmod(p)$ gilt, so sind die Linsenräume $L(p,q)$ und $L(p,q')$ orientierungserhaltend diffeomorph.

(c) Weiter sind $L(-p,q)$, $L(p,-q)$ und $-L(p,q)$ orientierungserhaltend diffeomorph.
**Bemerkung:** Die Relationen aus $(a)$, $(b)$ und $(c)$ liefern die vollständige Klassifikation von Linsenräumen bis auf orientierungserhaltende Diffeomorphie.

(d) Zeigen Sie, dass $(+5)$-Chirurgie entlang des rechtshändigen Kleeblattknotens einen Linsenraum liefert.

(e) Beschreiben Sie ein Chirurgiediagramm von der verbundenen Summe zweier Linsenräume.

(f) Zeigen Sie, dass $(+6)$-Chirurgie entlang des rechtshändigen Kleeblattknotens die verbundene Summe zweier Linsenräume liefert.

**Aufgabe 2.**

Eine 3-Mannigfaltigkeit $M(g,n;r_1,\dots r_k)$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{N}_0$ und $r_i \in \mathbb{Q}$ mit einem Chirurgiediagramm von der Form aus Abbildung 1 heißt **Seifert-gefaserte** 3-Mannigfaltigkeit mit **Seifert-Invarianten** $(g,n;r_1,\dots r_k)$.

(a) Zeigen Sie, dass $M(g,n;0,\dots 0)$ ein $S^1$-Bündel über $\Sigma_g$ mit Eulerzahl $n$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass man annehmen kann, dass $r_i \geq 1$ gilt.

(c) Konstruieren Sie ein Kirby-Diagramm einer kompakten 4-Mannigfaltigkeit $W$ mit

$$\partial W = M(g,n;r_1,\dots r_k).$$

(d) Zeigen Sie, dass Linsenräume Seifert-gefasert sind. Was sind die Seifert-Invarianten?

(e) Zeigen Sie, dass die $r$-Chirurgie eintlang dem rechtshändigen Kleeblattknoten ein Seifert-gefaserter Raum ist. Was sind die Seifert-Invarianten? Was sind die Seifert-Invarianten der Poincaré-Homologiesphäre?

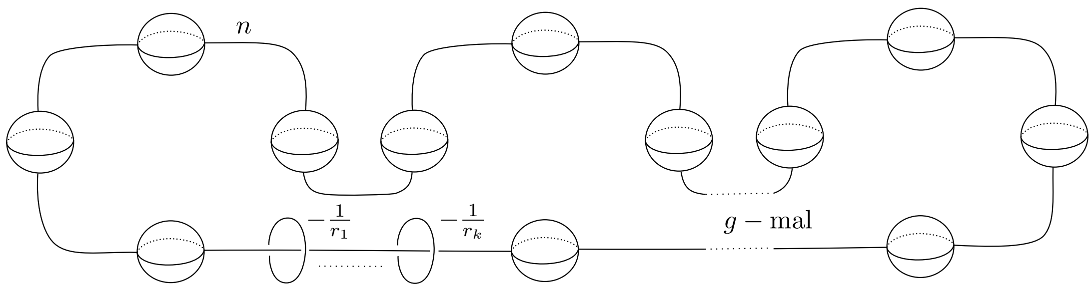


Abbildung 1: Ein Chirurgiediagramm einer Seifert-gefaserten 3-Mannigfaltigkeit.

**Aufgabe 3** (Diese Aufgabe gibt die doppelte Anzahl an Punkten)**.**
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass man je zwei ganzzahlige Chirurgiediagramme derselben Mannigfaltigkeit durch eine endliche Anzahl von 2-Henkelbewegungen und Hinzufügen/Entfernen von ($\pm 1$)-gerahmten Unknoten ineinander überführen kann (Satz 6.9). Weiter hatten wir gesehen (Satz 6.10), dass schon endlich viele der Bewegungen rechts unten in Abbildung 2 (für eine beliebige Anzahl $n$ von Strängen die durch den ($\pm 1$)-gerahmten Unknoten laufen) ausreichen.
Etwas unbefriedigend ist, dass 2-Henkelbewegungen keine lokalen Bewegungen in einem Chirurgiediagramm sind. Die Bewegungen rechts unten in Abbildung 2 sind zwar lokal aber dafür hat man unendlich viele solcher Bewegungen. (Die Anzahl $n$ der Stränge, die durch den ($\pm 1$)-gerahmten Unknoten laufen ist nicht beschränkt.)

(a) Zeigen Sie, dass die endlich vielen, lokalen Bewegungen aus Abbildung 2 ausreichen um zwei ganzzahlige Chirurgiediagramme derselben 3-Mannigfaltigkeit ineinander zu überführen.

(b) Zeigen Sie, dass auch die Bewegungen rechts unten in Abbildung 2 für $n \leq 5$ Stränge, die durch den ($\pm 1$)-gerahmten Unknoten laufen, ausreichen um zwei ganzzahlige Chirurgiediagramme derselben 3-Mannigfaltigkeit ineinander zu überführen.

(c) Hat man eine ähnliche Aussage für rationale Chirurgiediagramme?

*Hinweis:* Siehe B. Martelli, A finite set of local moves for Kirby calculus, *J. Knot Theory Ramifications* **21** (2012), 1250126, 5.

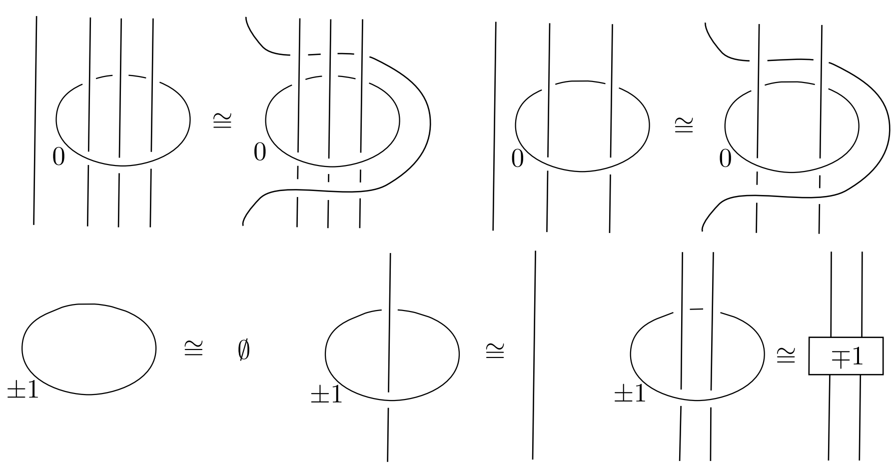


Abbildung 2: Endlich viele Modifikationen von ganzzahligen Chirurgiediagrammen. Die nicht gezeichneten Rahmungen transformieren auf die offensichtliche Art.

Abgabe: Montag, 18.6.18 **vor** der Vorlesung.