

Universität zu Köln
Mathematisches Institut

Bachelorarbeit

Kontakt-Dehn-Chirurgie entlang Legendre-Knoten

von Marc Kegel



Köln, 25. September 2011

Betreuer:

Prof. Hansjörg Geiges

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und Einleitung	5
2	Kontaktmannigfaltigkeiten	7
3	Konvexe Flächen	21
4	Kontaktchirurgie	32
5	Ausblick und Anwendungen	53

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und nur unter zur Hilfenahme der angegebenen Quellen erstellt habe.

1 Motivation und Einleitung

Ziel dieser Bachelorarbeit ist es die *Kontakt-Dehn-Chirurgie* einzuführen und einige Anwendungen dieser zu zeigen. Die Grundlage dafür ist [1].

Dehn-Chirurgie ist eine Konstruktionsmethode für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Grob gesprochen wird ein Volltorus aus einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit herausgeschnitten und dann auf eine andere Art wieder hineingeklebt. Man kann dann zeigen, dass das entstandene Objekt wieder eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist, die nur von sehr wenigen Daten abhängt, nämlich von der Seele des herausgeschnittenen Volltorus (einem Knoten) und dem sogenannten *Chirurgiekoeffizienten*, einer rationalen Zahl, welche die Anklebeabbildung beschreibt. Es zeigt sich dann, dass die Dehn-Chirurgie ein sehr starkes Werkzeug in der Theorie der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ist. Zum Beispiel kann jede dreidimensionale (zusammenhängende, orientierbare, geschlossene) Mannigfaltigkeit aus S^3 durch Chirurgie entlang einer Verschlingung erhalten werden (Satz von Dehn-Lickorish). Weiter lassen sich viele Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten verträglich mit Dehn-Chirurgie machen, das heißt sie bleiben unter Dehn-Chirurgie erhalten. So kann man ausgehend vom Satz von Dehn-Lickorish zeigen, dass jede dreidimensionale (zusammenhängende, orientierbare, geschlossene) Mannigfaltigkeit eine dreifach verzweigte Überlagerung über S^3 besitzt (Satz von Hilden-Montesinos) (für dies und weitere Informationen siehe [12]) oder dass jede solche Mannigfaltigkeit die Struktur eines offenen Buches hat (siehe [11, Satz 9.1.3]). Dies lässt hoffen, dass sich Dehn-Chirurgie auch verträglich mit Kontaktstrukturen ausführen lässt.

Eine *Kontaktstruktur* auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist ein nirgends integrierbares Ebenenfeld im Tangentialraum dieser Mannigfaltigkeit. Während man Ebenenfelder, welche durch zweidimensionale Blätterungen dieser Mannigfaltigkeit induziert wurden, lokal immer als Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit auffassen kann (dies bedeutet integrierbar), ist dies bei Kontaktstrukturen nirgends möglich. In gewisser Weise sind Kontaktstrukturen also das Gegenteil von Blätterungen. Die Motivation für diese Kontaktstrukturen stammt allerdings aus der theoretischen Physik. Dort treten

Kontaktmannigfaltigkeit zum Beispiel als Energiehyperflächen in Phasenräumen (also symplektischen Mannigfaltigkeiten) auf (siehe dazu [7, Kapitel 1]).

In Kapitel 2 wird genauer erklärt, was eine Kontaktstruktur ist und eine kurze Einführung in die hier benötigten Grundbegriffe der Kontaktgeometrie gegeben. Dabei wird allerdings nicht auf die physikalische Motivation eingegangen. Wer schon einige Erfahrung in diesem Bereich hat, kann das Kapitel auch überspringen.

Um die Dehn-Chirurgie verträglich mit den Kontaktstrukturen auszuführen, muss die alte Kontaktstruktur über den neu hereingeklebten Volltorus erweitert werden. Dazu muss man genau wissen, wie die Kontaktstruktur am Rand des herausgeschnittenen Volltorus aussieht. Um dies effizient angeben zu können wird in Kapitel 3 eine Einführung in die Theorie der konvexen Flächen gegeben.

Eine *konvexe Fläche* ist eine bestimmte Fläche in einer Kontaktmannigfaltigkeit. In einer Umgebung dieser Fläche ist die Kontaktstruktur dann im Wesentlichen schon durch Angabe einiger weniger einfach geschlossener Kurven auf dieser Fläche, der sogenannten *Teilungsmenge*, bestimmt. Bei der Kontakt-Dehn-Chirurgie wird dann ein Volltorus mit konvexem Rand herausgeschnitten, denn dann ist es relativ einfach den hereingeklebten Volltorus mit einer verträglichen Kontaktstruktur aufzufüllen.

Der Hauptteil dieser Arbeit ist das Kapitel 4, in dem zunächst kurz die Dehn-Chirurgie wiederholt und dann die Kontakt-Dehn-Chirurgie definiert wird. Im Anschluss werden einige einfache Sätze über diese Kontaktchirurgie bewiesen.

Zum Schluss werden in Kapitel 5 einige einfache Anwendungen dieser Sätze präsentiert und kurz ein Ausblick über weitere (kompliziertere) Anwendungen gegeben.

2 Kontaktmannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel wird, wie in der Einleitung schon erwähnt, eine kurze Einführung in die Grundbegriffe der Kontaktgeometrie gegeben. Die Grundlage dafür ist [7]. Am Anfang steht der Begriff der Kontaktmannigfaltigkeit, welcher seine Motivation aus der theoretischen Physik hat. Bevor aber die Definition einer Kontaktmannigfaltigkeit gegeben wird, sollte noch erwähnt werden, dass alle Abbildungen, Mannigfaltigkeiten, etc. als glatt (das heißt unendlich oft differenzierbar) vorausgesetzt werden.

Definition 2.1 (Kontaktmannigfaltigkeit).

Eine (kooorientierbare) **Kontaktstruktur** ξ auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M ist ein zweidimensionales Unterbündel von TM , so dass eine 1-Form α existiert mit $\xi = \ker \alpha$ und $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ (nirgends verschwindend). Eine solche 1-Form α heißt **Kontaktform** und die Bedingung $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ heißt **Kontaktbedingung**.

Das Paar (M, ξ) heißt **Kontaktmannigfaltigkeit**.

Bemerkung 2.2

(1) Das Vorzeichen der Kontaktbedingung ist unabhängig von der speziellen Wahl von α , denn eine andere Kontaktform für dieselbe Kontaktstruktur unterscheidet sich von α nur durch eine Funktion $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und dann gilt

$$(\lambda\alpha) \wedge d(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha \wedge d\alpha.$$

(2) Eine Kontaktstruktur induziert deswegen eine Orientierung auf der Kontaktmannigfaltigkeit durch die Volumenform $\alpha \wedge d\alpha$. (Diese Orientierung ist unabhängig von der Wahl der Kontaktform.) Also muss eine Kontaktmannigfaltigkeit notwendigerweise orientierbar sein. Hat man eine orientierte Mannigfaltigkeit gegeben, so kann man sinnvoll von positiven (oder negativen) Kontaktstrukturen sprechen, je nach dem, ob die Orientierung mit der durch ξ induzierten Orientierung übereinstimmt (oder nicht übereinstimmt).

(3) Den Begriff der Kontaktmannigfaltigkeit kann man noch etwas allgemeiner fassen. Zum einen kann man Kontaktstrukturen in allen ungerade Dimensionen definieren und

zum anderen kann man auch nicht koorientierte Kontaktstrukturen (was bedeutet, dass eine Kontaktform nur lokal existiert) betrachten. In dieser Arbeit werden allerdings nur koorientierbare Kontaktstrukturen auf dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten betrachtet, weswegen wir die Dimension und die Koorientierbarkeit in Zukunft unterdrücken werden. Die Kontaktstruktur ξ lässt sich dann durch die Form $d\alpha$ orientieren. Die Orientierung der Kontaktstruktur hängt also von der Wahl der Kontaktform ab. Wenn eine Kontaktform explizit gegeben ist, so soll die Kontaktstruktur immer durch $d\alpha$ orientiert sein.

Wenn man ein mathematisches Objekt auf eine solch abstrakte Weise einführt, stellt sich natürlich sofort die Frage, ob es solche Objekte überhaupt gibt. Dazu einige Beispiele:

Beispiel 2.3

(1) Betrachte den \mathbb{R}^3 mit kartesischen Koordinaten (x, y, z) . Die 1-Form

$$\alpha_{st} = x \, dy + dz$$

ist eine Kontaktform, denn $\alpha_{st} \wedge d\alpha_{st} = dx \wedge dy \wedge dz$ ist eine Volumenform, und definiert somit die sogenannte **Standardkontaktstruktur** $\xi_{st} := \ker \alpha_{st}$ auf \mathbb{R}^3 . Der Name begründet sich durch den Satz von Darboux, welcher besagt, dass jede Kontaktstruktur lokal wie die Standardkontaktstruktur aussieht (siehe Satz 2.6).

(2) Betrachte $S^1 \times \mathbb{R}^2$ mit Winkelkoordinate θ auf $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ und kartesischen Koordinaten (x, y) auf \mathbb{R}^2 . Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dann ist die 1-Form

$$\alpha_n = \cos(n\theta) \, dx - \sin(n\theta) \, dy$$

eine Kontaktform, denn

$$\alpha_n \wedge d\alpha_n = (\cos(n\theta) \, dx - \sin(n\theta) \, dy) \wedge (-n \sin(n\theta) \, d\theta \wedge dx - n \cos(n\theta) \, d\theta \wedge dy) = n \, d\theta \wedge dx \wedge dy.$$

Also ist $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n = \ker \alpha_n)$ eine Kontaktmannigfaltigkeit.

(3) Betrachte den \mathbb{R}^3 mit Zylinderkoordinaten (r, φ, z) . Definiere eine 1-Form durch

$$\alpha_{ot} = \cos r \, dz + r \sin r \, d\varphi.$$

Für $r = 0$ ist zuerst einmal nicht klar, dass dies wohldefiniert ist, da dann $d\varphi$ nicht wohldefiniert ist. Allerdings ist die 1-Form $r^2 \, d\varphi = x \, dy - y \, dx$ glatt und die Funktion

$r \mapsto \frac{\sin r}{r}$ besitzt eine differenzierbare Fortsetzung in $r = 0$, also ist α_{ot} wohldefiniert. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\alpha_{ot} \wedge d\alpha_{ot} &= \left(\cos r \, dz + r \sin r \, d\varphi \right) \wedge \left(-\sin r \, dr \wedge dz + (\sin r + r \cos r) \, dr \wedge d\varphi \right) \\ &= \left(\cos r \sin r + r \cos^2 r + r \sin^2 r \right) dr \wedge d\varphi \wedge dz \\ &= \left(1 + \frac{\sin r}{r} \cos r \right) r \, dr \wedge d\varphi \wedge dz.\end{aligned}$$

Wenn man in der Klammer nun in $r = 0$ wieder differenzierbar fortsetzt sieht man, dass α_{ot} eine Kontaktform ist und somit eine Kontaktstruktur $\xi_{ot} := \ker \alpha_{ot}$ induziert. Der Index ot steht für *overtwisted* (engl. für überdreht), denn diese Kontaktstruktur nennt man die **überdrehte Standardkontaktstruktur**. (Warum diese Bezeichnung Sinn macht sieht man in Beispiel 2.14 (1) und Definition 2.12.)

Als nächstes ist es ein natürliches Vorgehen, Abbildungen zu definieren, welche die Strukturen einer Kontaktmannigfaltigkeit erhalten.

Definition 2.4 (Kontaktomorphismus).

Seien (M_1, ξ_1) und (M_2, ξ_2) zwei Kontaktmannigfaltigkeiten.

(1) Ein Diffeomorphismus $f: M_1 \rightarrow M_2$ heißt **Kontaktomorphismus**, wenn er die Kontaktstrukturen erhält, bei gegebenen Kontaktformen $\xi_1 = \ker \alpha_1$ und $\xi_2 = \ker \alpha_2$ heißt dies, dass eine glatte Funktion $\lambda: M_1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit $f^* \alpha_2 = \lambda \alpha_1$.

(2) Zwei Kontaktmannigfaltigkeiten heißen **kontaktomorph**, wenn ein Kontaktomorphismus zwischen ihnen existiert.

(3) Eine Einbettung $f: M_1 \rightarrow M_2$ heißt **Kontakteinbettung**, wenn sie ein Kontaktomorphismus auf ihr Bild ist, das heißt $f: (M_1, \xi_1) \rightarrow (f(M_1), \xi_2)$ ist ein Kontaktomorphismus.

(4) Zwei Kontaktstrukturen ξ_1 und ξ_2 auf einer Mannigfaltigkeit M heißen **isotop**, falls es einen Kontaktomorphismus $(M, \xi_1) \rightarrow (M, \xi_2)$ gibt, der isotop zur Identität ist.

Beispiel 2.5

Die Kontaktmannigfaltigkeiten $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$ sind alle kontaktomorph zueinander. Dies sieht man wie folgt:

Definiere einen Diffeomorphismus von $S^1 \times \mathbb{R}^2$ durch

$$f_n(\theta, x, y) := \left(\theta, x \cos(n\theta) + y \sin(n\theta), -x \sin(n\theta) + y \cos(n\theta) \right).$$

Die 1-Form $f_n^* \alpha_n$ ist dann wieder eine Kontaktform, denn f_n ist ein Diffeomorphismus

und somit gilt $f_n^* \alpha_n \wedge d(f_n^* \alpha_n) = f_n^*(\alpha_n \wedge d\alpha_n) \neq 0$. Deswegen ist f_n ein Kontaktomorphismus von $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n = \ker \alpha_n)$ nach $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \ker f_n^* \alpha_n)$. Berechnen wir nun diese Kontaktform:

$$\begin{aligned}
 f_n^* \alpha_n &= f_n^* (\cos(n\theta) dx - \sin(n\theta) dy) \\
 &= \cos(n\theta) d(x \cos(n\theta) + y \sin(n\theta)) - \sin(n\theta) d(-x \sin(n\theta) + y \cos(n\theta)) \\
 &= \underbrace{(\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta))}_{=1} dx - \underbrace{(\cos(n\theta) \sin(n\theta) - \sin(n\theta) \cos(n\theta))}_{=0} dy \\
 &\quad + \underbrace{(\cos(n\theta) \sin(n\theta) - \sin(n\theta) \cos(n\theta))}_{=0} nx d\theta + \underbrace{(\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta))}_{=1} ny d\theta \\
 &= dx + ny d\theta.
 \end{aligned}$$

Definiere einen weiteren Diffeomorphismus von $S^1 \times \mathbb{R}^2$ durch

$$g_n(\theta, x, y) := \left(\theta, x, \frac{1}{n}y\right).$$

Damit gilt:

$$g_n^*(dx + ny d\theta) = dx + n \frac{1}{n} y d\theta = dx + y d\theta$$

Also ist g_n ein Kontaktomorphismus von $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \ker(dx + ny d\theta))$ zu der Kontaktmannigfaltigkeit $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \ker(dx + y d\theta))$. Die Behauptung folgt daraus, dass die Relation kontaktomorph zu sein offensichtlich eine Äquivalenzrelation ist. Man bemerke aber, dass die Kontaktstrukturen ξ_n nicht isotop sind (siehe Beispiel 3.12).

Satz 2.6 (Satz von Darboux).

Sei p ein Punkt in einer Kontaktmannigfaltigkeit (M, ξ) . Dann gibt es eine Kontakteinbettung $(B_{st}, \xi_{st}) \hookrightarrow (M, \xi)$, die den Ursprung auf p abbildet. Dabei bezeichnet B_{st} den Einheitsball im \mathbb{R}^3 .

*Jede Kontaktmannigfaltigkeit kann also mit solchen Abbildungen als Karten überdeckt werden. Diese Karten nennt man auch **Darboux-Karten**.*

Beweis. siehe [7, Satz 2.5.1] □

Der Satz von Darboux sagt also aus, dass lokal alle Kontaktstrukturen gleich aussehen. In der Kontaktgeometrie kann es also (ähnlich wie in der symplektischen Geometrie, aber im Gegensatz zur Riemannschen Geometrie) keine lokalen Invarianten geben.

Als Nächstes betrachten wir eine spezielle Klasse von Knoten in Kontaktmannigfaltig-

keiten, die sogenannten Legendre-Knoten. In Kapitel 4 wird dann gezeigt, dass Dehn-Chirurgie entlang dieser Legendre-Knoten relativ leicht verträglich mit der Kontaktstruktur ausgeführt werden kann.

Definition 2.7 (Legendre-Knoten).

Ein **Legendre-Knoten** in einer Kontaktmannigfaltigkeit (M, ξ) ist eine Einbettung $K: S^1 \rightarrow M$ mit $K'(\theta) \in \xi_{K(\theta)}$ für alle $\theta \in S^1$.

Bemerkung 2.8

Oft wird mit Legendre-Knoten auch das Bild einer solchen Einbettung bezeichnet. Im Folgenden wird für beides einfach K geschrieben und nicht mehr zwischen der Einbettung und dem Bild dieser Einbettung unterschieden. Je nach Kontext sollte klar sein, was gemeint ist.

Beispiel 2.9

Betrachte die Kontaktmannigfaltigkeit $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$ aus Beispiel 2.3 (2). Die Einbettung $S^1 \ni \theta \mapsto (\theta, 0, 0) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$ ist ein Legendre-Knoten, denn die Ableitung $(1, 0, 0)$ liegt immer im Kern von $\alpha_n = \cos(n\theta) dx - \sin(n\theta) dy$.

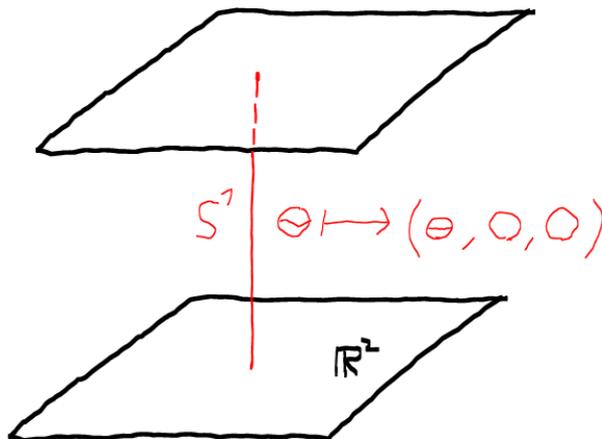


Abbildung 2.1: Ein Legendre-Knoten in der Kontaktmannigfaltigkeit $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$

Lokal sieht sogar jeder Legendre-Knoten so aus, wie folgender Satz zeigt.

Satz 2.10 (Umgebungssatz für Legendre-Knoten).

Sei $K: S^1 \rightarrow (M, \xi)$ ein Legendre-Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit. Dann ist eine Umgebung von K in M für jedes $r > 0$ kontaktomorph zu $(S^1 \times D_r, \xi_n)$ und der Kontaktomorphismus bildet K auf $\theta \mapsto (\theta, 0, 0)$ ab. Dabei bezeichnet D_r die Scheibe mit Radius r im \mathbb{R}^2 .

Beweis. siehe [7, Beispiel 2.5.10]

Dort wird dieser Satz zwar nur für eine Umgebung von $\theta \mapsto (\theta, 0, 0)$ und nur für die Kontaktstruktur ξ_1 bewiesen, aber zusammen mit Beispiel 2.5 und mit der Beobachtung, dass die Abbildung $(\theta, x, y) \mapsto (\theta, rx, ry)$ für jedes $r > 0$ ein Kontaktomorphismus für die Kontaktstrukturen ξ_n ist, folgt die Behauptung auch in dieser allgemeineren Form. \square

Satz 2.11 (Approximationssatz durch Legendre Knoten).

Sei $K: S^1 \rightarrow (M, \xi)$ ein beliebiger Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit. Dann kann K durch einen zu K isotopen Legendre-Knoten C^0 -nah approximiert werden.

Beweisskizze. (für genaueren Beweis siehe [7, Satz 3.2.3 und Satz 3.3.1])

Betrachte zuerst einen beliebigen Knoten

$$S^1 \ni t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in (\mathbb{R}^3, \xi_{st} = \ker(xdy + dz))$$

im \mathbb{R}^3 mit der Standardkontaktstruktur. Dieser Knoten ist ein Legendre-Knoten genau dann, wenn $z'(t) + x(t)y'(t) = 0$ gilt (durch Einsetzen in die Kontaktform). Nach einer kleinen Störung eines solchen Legendre-Knotens kann angenommen werden, dass $y'(t) \neq 0$ bis auf isolierte Punkte, diese Punkte heißen **Spitzen**. Durch seine **Front-Projektion**

$$S^1 \ni t \mapsto (y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^2$$

ist ein solcher Knoten dann eindeutig festgelegt, denn abseits der (isolierten) Spitzen gilt dann

$$x(t) = -\frac{z'(t)}{y'(t)} = -\frac{dz}{dy}.$$

Sei nun $K: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{R}^3, \xi_{st})$ eine Einbettung. Dann approximiere ihre Front-Projektion durch eine sogenannte Front (das sind Kurven ohne vertikale Tangenten, aber mit Spitzen), deren Steigung $\frac{dz}{dy}$ die negative x -Komponente von K approximiert (siehe Skizze).

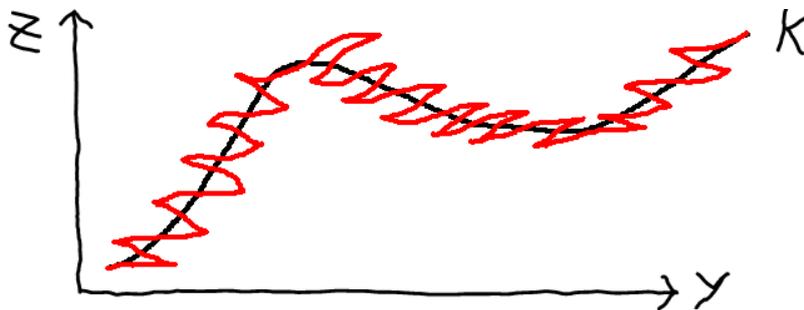


Abbildung 2.2: Ein Legendre-Approximation durch eine Front

Diese Einbettung hebt dann zu einer Legendre-Einbettung in (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) an.

Hat man nun einen allgemeinen Knoten $K: S^1 \rightarrow (M, \xi)$ in einer allgemeinen Kontaktmannigfaltigkeit, dann kann man diesen Knoten (mit dem Lemma von Lebesgue) in endlich viele Stücke zerteilen, die in Darboux-Karten liegen, und jedes dieser Stücke durch eine Legendre-Einbettung approximieren. Insgesamt ergibt sich dann also ein Legendre-Knoten, der isotop zu dem alten Knoten ist und beliebig nahe an ihm liegt. \square

Dieser Satz zeigt also insbesondere, dass es in jeder Kontaktmannigfaltigkeit sehr viele Legendre-Knoten gibt und dass die Einschränkung auf Legendre-Knoten bei der Kontakt-Dehn-Chirurgie keine wirkliche Einschränkung ist.

Als Nächstes wird eine fundamentale Aufteilung der Kontaktstrukturen in sogenannte überdrehte und straffe Kontaktstrukturen eingeführt. Auf den ersten Blick wirkt dies völlig willkürlich, aber die Arbeiten von Eliashberg zeigen, dass dies der erste wichtige Schritt in Richtung der Klassifikation von Kontaktstrukturen ist. Auf diesen Aspekt wird hier allerdings nicht eingegangen. Historisch war es auch ein langer Weg dies so einzuführen, wie es jetzt hier gemacht wird (für diese Aspekte siehe [7, Kapitel 4]).

Definition 2.12 (überdrehte und straffe Kontaktstrukturen).

(1) Eine eingebettete Scheibe $\Delta \subset (M, \xi)$ in einer Kontaktmannigfaltigkeit heißt **überdrehte Scheibe**, wenn ihr Rand $\partial\Delta$ ein Legendre Knoten für ξ ist und Δ entlang $\partial\Delta$ transversal zu ξ ist.

(2) Eine Kontaktstruktur ξ auf einer Mannigfaltigkeit M heißt **überdreht**, falls es eine in M eingebettete überdrehte Scheibe gibt. Wenn keine solche eingebettete überdrehte Scheibe existiert, heißt die Kontaktstruktur **straff**.

Bemerkung 2.13

Diese Definition lässt sich nur mit größerem Aufwand auf beliebige Dimensionen ausweiten. Die Aufteilung der Kontaktstrukturen in straffe und überdrehte ist also ein Phänomen, das zuerst einmal nur im Dreidimensionalen auftritt.

Beispiel 2.14

(1) Die überdrehte Standardkontaktstruktur ξ_{ot} auf dem \mathbb{R}^3 aus Beispiel 2.3 (3) ist, wie der Name schon andeutet, eine überdrehte Kontaktstruktur. Eine überdrehte Scheibe erhält man indem man die Scheibe $\Delta := \{z = 0, r \leq \pi\}$ betrachtet. Der Rand dieser Scheibe ist $\{z = 0, r = \pi\}$ und somit offensichtlich ein Legendre-Knoten für diese Kontaktstruktur. Δ ist aber noch keine überdrehte Scheibe, denn an den Punkten $\{z = 0, r = \pi\} \cup \{0\}$ liegen ihre Tangentialebenen im Kern von α_{ot} , das heißt die Scheibe

ist dort tangential an die Kontaktstruktur. In allen anderen Punkten ist Δ transversal zu ξ_{ot} . (Dies sieht man alles sofort an $\alpha_{ot} = \cos r dz + r \sin r d\varphi$.) Wenn man Δ nun ein kleines Stück anhebt, aber dabei den Rand festlässt, liefert dies eine überdrehte Scheibe, denn $\partial\Delta$ ist dann immer noch ein Legendre-Knoten, aber in einer Umgebung des Randes ist Δ dann transversal zu ξ_{ot} .

(2) Die Standardkontaktstruktur ξ_{st} auf \mathbb{R}^3 , ist straff (siehe [7, Bemerkung 4.6.37]).

(3) Die Kontaktstrukturen ξ_n auf $S^1 \times \mathbb{R}^2$ sind alle straff. Dies sieht man wie folgt: Angenommen ξ_n wäre überdreht. Dann gibt es eine überdrehte Scheibe $\Delta \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$. Da diese überdrehte Scheibe kompakt ist, existiert ein $r > 0$, sodass $\Delta \subset (S^1 \times D_r, \xi_n)$. Nach dem Umgebungssatz für Legendre-Knoten ist $(S^1 \times D_r, \xi_n)$ kontaktomorph zu einer Umgebung eines Legendre-Knotens in (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) . Mit diesem Kontaktomorphismus würde die überdrehte Scheibe Δ dann auf eine überdrehte Scheibe in (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) abbilden. Was aber nicht sein kann, da diese Kontaktstruktur straff ist.

Bemerkung 2.15

Dies zeigt insbesondere, dass (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) nicht kontaktomorph zu (\mathbb{R}^3, ξ_{ot}) ist und dass (\mathbb{R}^3, ξ_{ot}) nicht kontaktomorph in die Kontaktmannigfaltigkeiten $(S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$ eingebettet werden kann.

Nach dem Satz von Darboux und dem Umgebungssatz für Legendre-Knoten kann man aber (B_{st}, ξ_{st}) und die $(S^1 \times D_r, \xi_n)$ kontaktomorph in (\mathbb{R}^3, ξ_{ot}) einbetten.

Als nächstes werden symplektische Mannigfaltigkeiten eingeführt. Die Motivation dazu stammt, genau wie bei den Kontaktmannigfaltigkeiten, aus der theoretischen Physik. Dort treten symplektische Mannigfaltigkeiten ganz natürlich als Phasenräume physikalischer Systeme auf. Symplektische Mannigfaltigkeiten sind mit den Kontaktmannigfaltigkeiten sehr eng verknüpft. In vielerlei Hinsicht sind Kontaktmannigfaltigkeiten das Gegenstück zu symplektischen Mannigfaltigkeiten. Einige Aspekte dieser Phänomene werden weiter unten deutlich.

Definition 2.16 (symplektische Mannigfaltigkeit).

Eine 2-Form ω auf einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit W heißt **symplektische Form**, falls sie geschlossen (das heißt $d\omega = 0$) und nicht-entartet ist (das heißt die Differentialform $\omega^2 := \omega \wedge \omega$ ist eine Volumenform auf W).

Das Paar (W, ω) heißt dann **symplektische Mannigfaltigkeit**.

Bemerkung 2.17

Ähnlich wie bei den Kontaktmannigfaltigkeiten (siehe Bemerkung am Anfang) gilt, dass

man den Begriff der symplektischen Mannigfaltigkeit auch in höheren Dimensionen definieren kann, hier allerdings nur in geraden Dimensionen. In dieser Arbeit kommen aber nur vierdimensionale symplektische Mannigfaltigkeiten vor, weshalb wir auch hier die Dimension unterdrücken. Weiter ist auch auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit eine natürliche Orientierung durch die Volumenform ω^2 gegeben.

Beispiel 2.18

- (1) Die **symplektische Standardform** auf dem \mathbb{R}^4 mit kartesischen Koordinaten (x, y, z, t) ist $\omega_{st} = dx \wedge dy + dz \wedge dt$ ($d\omega_{st} = 0$ und ω_{st}^2 ist die Standardvolumenform). Ähnlich wie bei der Standardkontaktstruktur auf dem \mathbb{R}^3 , kann man auch hier zeigen, dass jede symplektische Form lokal aussieht wie die symplektische Standardform. Dies nennt man dann auch Satz von Darboux (siehe [9, Satz 1]). Genau wie in der Kontaktgeometrie, gibt es also auch in der symplektischen Geometrie keine lokalen Invarianten.
- (2) Sei $(M, \xi = \ker \alpha)$ eine Kontaktmannigfaltigkeit. Bezeichne mit t die \mathbb{R} -Koordinate in $\mathbb{R} \times M$ und mit $p: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ die Projektion. Dann kann man α mit p zu einer 1-Form auf $\mathbb{R} \times M$ zurückziehen. Der Einfachheit halber identifiziert man diese 1-Form $p^*\alpha$ mit α .

Dann ist $(\mathbb{R} \times M, \omega := d(e^t\alpha))$ eine symplektische Mannigfaltigkeit, die sogenannte **Symplektifizierung** von M , denn für die geschlossene 2-Form ω gilt:

$$\omega^2 = d(e^t\alpha) \wedge d(e^t\alpha) = e^t(dt \wedge \alpha + d\alpha) \wedge e^t(dt \wedge \alpha + d\alpha) = 2e^{2t} dt \wedge \alpha \wedge d\alpha \neq 0$$

Die Orientierung von W (durch ω^2) stimmt mit der Produktorientierung von $\mathbb{R} \times M$ überein (wenn M durch $\alpha \wedge d\alpha$ orientiert ist). (Dies scheint jetzt nicht sehr wichtig, wird aber später bei der Betrachtung symplektischer Kobordismen entscheidend.)

Man kann also aus einer Kontaktmannigfaltigkeit eine symplektischen Mannigfaltigkeit erhalten. Andersherum wollen wir auch aus symplektischen Mannigfaltigkeiten Kontaktmannigfaltigkeiten konstruieren. Dazu braucht man die folgende Definition:

Definition 2.19 (Liouville-Vektorfeld).

*Ein Vektorfeld Y auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (W, ω) heißt **Liouville-Vektorfeld**, falls $\mathcal{L}_Y\omega = \omega$.*

Mit diesen Liouville-Vektorfeldern kann man nun Kontaktmannigfaltigkeiten erhalten.

Proposition 2.20 (Kontakthyperfläche).

Sei M eine Hyperfläche in einer symplektischen Mannigfaltigkeit (W, ω) , die transversal

zu einem Liouville-Vektorfeld Y steht. Dann ist $(M, \ker \iota_Y \omega)$ eine Kontaktmannigfaltigkeit.

Solche Kontaktmannigfaltigkeiten nennt man auch **Kontakthyperflächen**.

Beweis.

Nachzurechnen ist die Kontaktbedingung für die 1-Form $\iota_Y \omega$. Nach der Formel von Cartan für die Lie-Ableitung und wegen $d\omega = 0$ gilt

$$\omega = \mathfrak{L}_Y \omega = d(\iota_Y \omega) + \iota_Y(d\omega) = d(\iota_Y \omega).$$

Also:

$$\iota_Y \omega \wedge d(\iota_Y \omega) = (\iota_Y \omega) \wedge \omega = \frac{1}{2} \iota_Y(\omega^2)$$

Da nun ω^2 eine Volumenform auf (W, ω) ist, ist auch $\iota_Y(\omega^2)$ eine Volumenform auf jeder Hyperfläche transversal zu Y . □

Beispiel 2.21

(1) Betrachte den \mathbb{R}^4 mit seiner symplektischen Standardstruktur ω_{st} (wie im obigen Beispiel). Dann ist das Radialvektorfeld $Y := \frac{1}{2}(x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z + t \partial_t)$ ein Liouville-Vektorfeld für ω_{st} , denn:

$$\mathfrak{L}_Y \omega_{st} = d(\iota_Y \omega_{st}) = d\left(\frac{1}{2}(x dy - y dx + z dt - t dz)\right) = dx \wedge dy + dz \wedge dt = \omega_{st}.$$

Weiter ist das Liouville-Vektorfeld Y transversal zu der Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Also induziert Y eine Kontaktstruktur auf S^3 , nämlich die sogenannte **Standardkontaktstruktur** auf S^3 :

$$\xi_{st} = \ker \alpha_{st} = \ker \iota_Y \omega_{st} = \ker\left(\frac{1}{2}(x dy - y dx + z dt - t dz)\right)$$

Man kann zeigen, dass $(S^3 \setminus \{p\}, \xi_{st})$ kontaktomorph zu (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) ist, weswegen es sinnvoll ist beide Kontaktstrukturen die Standardkontaktstruktur zu nennen (siehe [7, Proposition 2.1.8]).

(2) Betrachte die Symplektifizierung $(\mathbb{R} \times M, \omega := d(e^t \alpha))$ einer Kontaktmannigfaltigkeit $(M, \xi = \ker \alpha)$. Dann ist das Vektorfeld $Y := \partial_t$ ein Liouville-Vektorfeld für ω , denn:

$$\mathfrak{L}_Y \omega = d(\iota_Y(e^t dt \wedge \alpha + \alpha \wedge \alpha)) = d(e^t \alpha) = \omega$$

Betrachtet man nun einen (topologischen) Kobordismus zwischen zwei Mannigfaltigkeiten

ten, die eine Kontaktstruktur tragen, kann man sich fragen, ob dieser Kobordismus eine symplektische Struktur trägt, welche die Kontaktstrukturen im obigen Sinne induziert. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 2.22 (symplektischer Kobordismus und symplektische Füllung).

(1) Seien (M_{\pm}, ξ_{\pm}) zwei geschlossene Kontaktmannigfaltigkeiten orientiert durch die von den Kontaktstrukturen induzierten Volumenformen. Ein (starker) **symplektischer Kobordismus** von (M_-, ξ_-) nach (M_+, ξ_+) ist eine kompakte symplektische Mannigfaltigkeit (W, ω) , orientiert durch ω^2 , so dass:

- $\partial W = M_+ \sqcup \overline{M_-}$, wobei $\overline{M_-}$ die Mannigfaltigkeit M_- mit umgekehrter Orientierung bezeichnet,
- ein Liouville-Vektorfeld Y in einer Umgebung von ∂W existiert, das transversal zu ∂W ist, entlang M_+ nach außen und entlang M_- nach innen zeigt, und
- dieses Liouville-Vektorfeld die Kontaktstruktur der Kontaktmannigfaltigkeit (M_{\pm}, ξ_{\pm}) induziert (das heißt: $\ker(\iota_Y \omega|_{TM_{\pm}}) = \xi_{\pm}$).

(M_-, ξ_-) heißt dann (stark) **symplektisch kobordant** zu (M_+, ξ_+) .

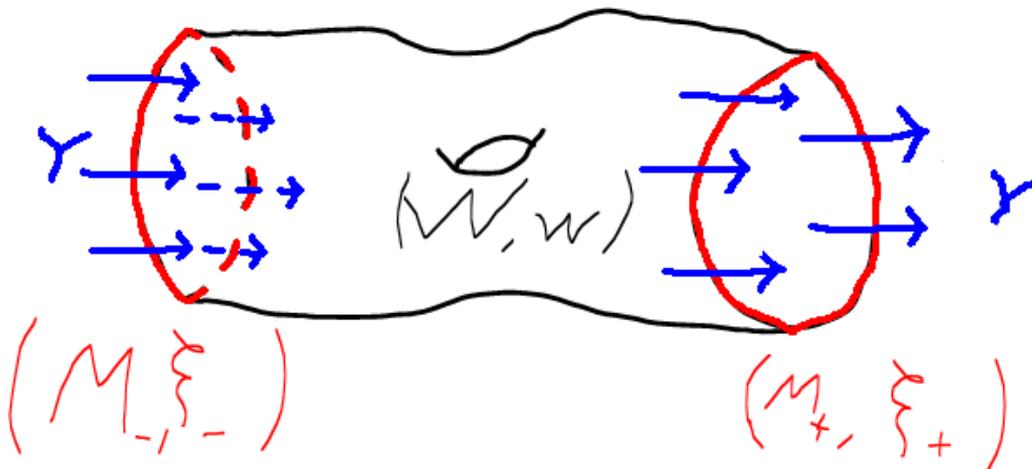


Abbildung 2.3: Ein (starker) symplektischer Kobordismus von (M_-, ξ_-) nach (M_+, ξ_+)

(2) Ein (starker) symplektischer Kobordismus von der leeren Menge \emptyset zu einer Kontaktmannigfaltigkeit (M, ξ) heißt eine (starke) **symplektische Füllung** von (M, ξ) .

(M, ξ) heißt dann (stark) **symplektisch füllbar**.

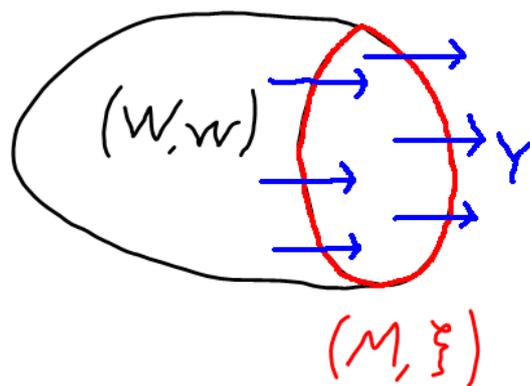


Abbildung 2.4: Eine (starke) symplektische Füllung von (M, ξ)

Bemerkung 2.23

(1) In den Abbildungen oben sind solche Situationen schematisch in zwei Dimensionen kleiner dargestellt. Die Kontaktmannigfaltigkeiten sind dort eindimensional gezeichnet und die Kobordismen als zweidimensionale Objekte.

(2) Es gibt auch eine etwas schwächere Formulierung dieser Definition nämlich den schwachen symplektischen Kobordismus (und dann analog auch die schwache symplektische Füllung). Wie der Name schon andeutet ist ein starker symplektischer Kobordismus auch ein schwacher symplektischer Kobordismus, die Umkehrung gilt allerdings nicht (siehe [7, Kapitel 5]). In dieser Arbeit werden aber nur starke symplektische Kobordismen betrachtet, deshalb wird stattdessen einfach nur von einem symplektischen Kobordismus gesprochen.

Beispiel 2.24

(1) Nach Beispiel 2.21 (1) ist (S^3, ξ_{st}) symplektisch füllbar durch (D^4, ω_{st}) .

(2) Nach Beispiel 2.18 (2) und Beispiel 2.21 (2) ist jede geschlossene Kontaktmannigfaltigkeit symplektisch kobordant zu sich selbst vermöge des symplektischen Kobordismus $([0, 1] \times M, \omega = d(e^t \alpha))$.

Allgemeiner gilt:

Satz 2.25 (über symplektische Kobordismen).

Die Relation symplektisch kobordant zu sein ist reflexiv und transitiv, aber **nicht** symmetrisch.

Beweisskizze.

Die Reflexivität folgt aus dem Beispiel 2.24 (2).

Für die Transitivität muss man etwas mehr arbeiten. Sei (W_-, ω_-) ein symplektischer Kobordismus von (M_-, ξ_-) nach (M, ξ) und (W_+, ω_+) ein symplektischer Kobordismus von (M, ξ) nach (M_+, ξ_+) (siehe auch Abbildung 2.5). Bezeichne mit $j_\pm: M \rightarrow W_\pm$ die Inklusionen und mit Y_\pm die entsprechenden Liouville-Vektorfelder. Dann sind $\alpha_\pm := j_\pm^*(\iota_{Y_\pm}\omega_\pm)$ zwei Kontaktformen zur Kontaktstruktur ξ . Es gibt also eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\alpha_+ = e^f\alpha_-$ ist. Für eine Konstante $C \gg 0$ ist $(W_+, C\omega_+)$ immer noch ein symplektischer Kobordismus von (M, ξ) nach (M_+, ξ_+) . Man kann also ohne Einschränkung annehmen, dass f nur positive reelle Werte annimmt.

Definiere für eine geeignete Umgebung $U_-(M)$ von M in W_- einen Diffeomorphismus

$$\Phi: U_-(M) \longrightarrow ((\epsilon, 0] \times M, d(e^t\alpha_-)),$$

indem die Flusslinien von Y_- auf die Flusslinien von ∂_t abgebildet werden. Man kann nun zeigen, dass Φ dann die symplektischen Strukturen erhält, also ein **Symplektomorphismus** ist. (Dies ist kein Zufall. Allgemeiner kann man zeigen, dass gleiche Kontakthyperflächen in symplektischen Mannigfaltigkeiten symplektomorphe Umgebungen besitzen. Also ist die symplektische Struktur in einer Umgebung einer Kontakthyperfläche schon eindeutig durch diese Kontakthyperfläche bestimmt.) (siehe [7, Lemma 5.2.4]) So erhält man also eine Kragenumgebung von M in (W_-, ω_-) der Form

$$((\epsilon, 0] \times M, \omega_- = d(e^t\alpha_-)).$$

Analog erhält man eine Kragenumgebung von M in (W_+, ω_+) der Form

$$([0, \epsilon) \times M, \omega_+ = d(e^t\alpha_+) = d(e^{t+f}\alpha_-)).$$

Definiere nun eine symplektische Mannigfaltigkeit durch

$$W_0 := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : 0 \leq t \leq f(x)\}$$

mit symplektischer Form $d(e^t\alpha_-)$. Dann ist

$$(W_- + W_0 + W_+)/\sim,$$

mit $W_- \ni (0, x) \sim (0, x) \in W_0$ und $W_0 \ni (f(x), x) \sim (0, x) \in W_+$, ein symplektischer Kobordismus von (M_-, ξ_-) nach (M_+, ξ_+) . Betrachte dazu auch die schematische Abbildung unten (in zwei Dimensionen tiefer).

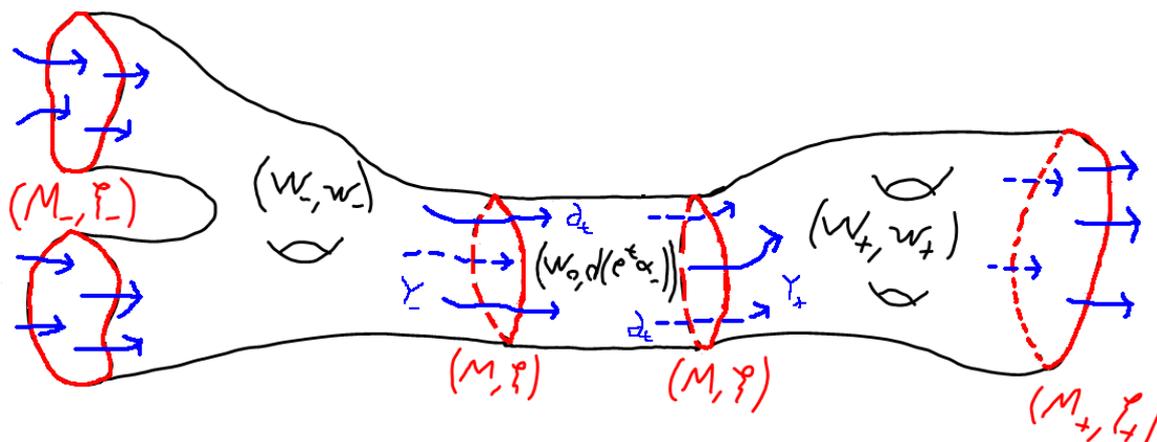


Abbildung 2.5: Ein symplektischer Kobordismus von (M_-, ξ_-) nach (M_+, ξ_+)

Die Relation symplektisch kobordant zu sein, ist also auch transitiv.

Aber wie oben schon gesagt ist sie nicht symmetrisch. Dies folgt sofort aus den beiden folgenden (nicht-trivialen) Sätzen. □

Satz 2.26 (Gromov-Eliashberg-Straffheitssatz).

Wenn eine Kontaktmannigfaltigkeit (M, ξ) symplektisch füllbar ist, so ist die Kontaktstruktur ξ straff. Anders gesagt, ist eine Kontaktmannigfaltigkeit mit überdrehter Kontaktstruktur nicht symplektisch füllbar.

Beweis. siehe [7, Satz 6.5.6] □

Satz 2.27 (Existenz von Kobordismen zur leeren Menge).

Für jede Kontaktmannigfaltigkeit existiert ein symplektischer Kobordismus von dieser Kontaktmannigfaltigkeit zur leeren Menge.

Beweis. siehe [6] □

3 Konvexe Flächen

In diesem Kapitel wird eine Einführung in die Theorie der konvexen Flächen gegeben, welche fast komplett von Giroux entwickelt wurde. Diese wird dann in Kapitel 4 benötigt um die Kontakt-Dehn-Chirurgie zu definieren. Grundlage dafür ist [7, Kapitel 4.8].

Eine Motivation hinter den konvexen Flächen ist der Zusammenhang zwischen symplektischen und Kontaktmannigfaltigkeiten. Im Beweis von Satz 2.25 haben wir gesehen, dass eine Kontakthyperfläche in einer symplektischen Mannigfaltigkeit schon alle Eigenschaften der symplektischen Struktur in einer Umgebung der Hyperfläche trägt. Diese Eigenschaften sind alle in einer Kontaktstruktur, welche durch die symplektische Struktur induziert wurde, kodiert. Man kann also zum Beispiel symplektische Mannigfaltigkeiten entlang dieser Hyperflächen aufschneiden und wieder zusammenkleben und dabei die symplektische Struktur erhalten, solange die Kontaktstrukturen auf diesen Hyperflächen übereinstimmen (siehe zum Beispiel Beweis von Satz 2.25). Man hat also eine vierdimensionale Struktur in der Umgebung einer dreidimensionalen Hyperfläche auf eine dreidimensionale Struktur zurückgeführt. Dasselbe soll nun für Kontaktstrukturen gemacht werden. Man möchte also die Kontaktstruktur in der Umgebung einer Fläche durch eine Struktur auf der Fläche beschreiben. Das Erstaunliche dabei ist, dass man ziemlich ähnlich vorgehen kann.

Aber zuerst wird ein etwas einfacheres Konzept beschrieben, nämlich das Konzept der charakteristischen Blätterung.

Definition 3.1 (charakteristische Blätterung).

Sei $S \subset (M, \xi = \ker \alpha)$ eine orientierte geschlossene Fläche in einer Kontaktmannigfaltigkeit mit orientierter Kontaktstruktur. (Die Kontaktstruktur ist orientiert durch $d\alpha$, wie in der Bemerkung am Anfang beschrieben.) Dabei sei S durch eine Volumenform Ω so orientiert, dass $S \times \mathbb{R}$ (identifiziert mit einer Umgebung von S in M) die Orientierung von M (induziert durch die Kontaktstruktur) liefert.

*Die **charakteristische Blätterung** S_ξ von S induziert durch die Kontaktstruktur ξ ist*

die eindimensionale, singuläre Blätterung repräsentiert durch das Vektorfeld X , welches

$$\iota_X \Omega = \alpha|_{TS}$$

erfüllt.

Bemerkung 3.2

(1) Eine eindimensionale, singuläre Blätterung auf einer Fläche kann man auffassen als Äquivalenzklasse von Vektorfeldern auf dieser Fläche, wobei zwei Vektorfelder äquivalent sind, wenn sie sich nur durch eine Funktion $f: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ unterscheiden, und andere Wahlen von Ω oder α führen zu einem Vektorfeld, dass sich von dem alten nur durch eine solche Funktion $f: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ unterscheidet.

Also ist die charakteristische Blätterung bei fester Orientierung der Fläche unabhängig von der Wahl der Volumenform Ω und bei fester Orientierung der Kontaktstruktur ξ unabhängig von der Wahl der Kontaktform α , sie wird also nur durch die Fläche S und die Kontaktstruktur ξ bestimmt.

(2) Geometrisch zeigt das Vektorfeld immer in Richtung der Geraden, in der sich der Tangentialraum von S und die Kontaktebene schneidet, und falls diese übereinstimmen ist das Vektorfeld null.

Beispiel 3.3

Betrachte $V := \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n = \ker(\cos(n\theta) dx - \sin(n\theta) dy))$. Der Rand $\partial V = \{x^2 + y^2 = 1\}$ ist eine geschlossene Fläche. Versehe den \mathbb{R}^2 -Faktor mit Polarkoordinaten (r, φ) , dann induziert die Volumenform $\Omega := d\theta \wedge d\varphi$ die Standardorientierung auf S . Um nun die charakteristische Blätterung von S zu bestimmen, suchen wir ein Vektorfeld X auf S , welches $\iota_X \Omega = \alpha_n|_{TS}$ erfüllt. Ein allgemeines Vektorfeld auf S ist von der Form $X(\theta, \varphi) = a(\theta, \varphi) \partial_\theta + b(\theta, \varphi) \partial_\varphi$. Wenn man dies in die Gleichung einsetzt, erhält man:

$$\alpha_n|_{TS} = \iota_X \Omega = a(\theta, \varphi) d\varphi - b(\theta, \varphi) d\theta.$$

Auf S gilt nun $dx = -\sin \varphi d\varphi$ und $dy = \cos \varphi d\varphi$, also ist

$$\alpha_n|_{TS} = (\cos(n\theta) dx - \sin(n\theta) dy)|_{TS} = -(\cos(n\theta) \sin \varphi - \sin(n\theta) \cos \varphi) d\varphi.$$

Koeffizientenvergleich liefert dann $X(\theta, \varphi) = -(\cos(n\theta) \sin \varphi - \sin(n\theta) \cos \varphi) \partial_\theta$. Dies kann man nun wieder in kartesische Koordinaten umrechnen und erhält ein Vektorfeld

X auf S , welches die charakteristische Blätterung S_{ξ_n} beschreibt:

$$X(\theta, x, y) = -\left(x \sin(n\theta) + y \cos(n\theta)\right) \partial_\theta.$$

In Abbildung 3.1 weiter unten sind einige Integralkurven der charakteristische Blätterung im Fall $n = 1$ in grün eingezeichnet.

Was dies alles bringt, zeigt der folgende Satz.

Satz 3.4 (über die Kontaktstruktur in der Umgebung einer Fläche).

Seien $S_i \subset (M_i, \xi_i)$ ($i = 1, 2$) zwei orientierte, geschlossene Flächen in zwei Kontaktmannigfaltigkeiten und sei $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ ein Diffeomorphismus mit $\phi(S_{1, \xi_1}) = S_{2, \xi_2}$.

Dann gibt es einen Kontaktomorphismus $\psi : U(S_1) \rightarrow U(S_2)$ von geeigneten Umgebungen $U(S_i)$ von S_i in M_i mit $\psi|_{S_1} = \phi$.

Beweis. siehe [7, Satz 2.5.23] □

Dieser Satz sagt also aus, dass eine Kontaktstruktur in einer Umgebung einer Fläche schon durch die charakteristische Blätterung auf dieser Fläche bestimmt ist. Dies ist eine entscheidende Beobachtung, wenn wir später Chirurgiekonstruktionen durchführen wollen, das heißt entlang Flächen aufschneiden und wieder zusammenkleben. Mit diesem Satz kann man solche Konstruktionen mit den Kontaktstrukturen verträglich machen, solange man dafür sorgen kann, dass die charakteristischen Blätterungen dieselben sind. Dies ist allerdings nicht so einfach, da charakteristische Blätterungen sehr kompliziert sein können. Dieses Problem löst die Theorie der konvexen Flächen, denn bei diesen konvexen Flächen ist die charakteristische Blätterung (und nach dem vorigen Satz dann auch die Kontaktstruktur) schon durch viel weniger bestimmt, nämlich durch eine endliche Vereinigung von eingebetteten, einfach geschlossenen Kurven auf der Fläche. Um den Begriff der konvexen Fläche zu definieren, wird zuerst ein Objekt benötigt, das dem Liouville-Vektorfeld recht ähnlich ist.

Definition 3.5 (Kontaktvektorfeld).

Ein Vektorfeld X auf einer Kontaktmannigfaltigkeit $(M, \xi = \ker \alpha)$ heißt **Kontaktvektorfeld** falls, $\mathfrak{L}_X \alpha = \mu \alpha$ für eine Funktion $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung 3.6

(1) Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Wahl der Kontaktform α , welche die Kontaktstruktur ξ beschreibt, denn für eine weitere Kontaktform $\tilde{\alpha} = \lambda \alpha$ mit

$\lambda: M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\mathfrak{L}_X(\lambda\alpha) = (d\lambda(X) + \lambda\mu)\alpha,$$

wie man mit der Definition der Lie-Ableitung oder der Cartan-Formel sofort nachrechnen kann.

(2) Man kann zeigen, dass diese Definition äquivalent dazu ist, dass der Fluss von X die Kontaktstruktur erhält (also ein lokaler Kontaktmorphismus ist), was man normalerweise als Definition zugrunde legt. In dieser Arbeit wird allerdings nur die obige Eigenschaft eines Kontaktvektorfeldes benötigt.

Mit diesen Kontaktvektorfeldern kann man nun den Begriff der konvexen Fläche, völlig analog zu den Kontakthyperflächen in symplektischen Mannigfaltigkeiten definieren (siehe Proposition 2.20).

Definition 3.7 (konvexe Fläche).

Eine orientierte geschlossene Fläche $S \subset (M, \xi)$ heißt **konvexe Fläche**, falls ein Kontaktvektorfeld in einer Umgebung von S existiert, das transversal zu S ist.

Bemerkung 3.8

(1) Der Begriff konvex hat hier nichts mit dem geometrischen Begriff konvex zu tun. Hier gibt es auch keine Unterscheidung zwischen konvex und konkav, deshalb ist dieser Begriff etwas irreführend.

(2) Man kann den Begriff der konvexen Fläche auch etwas allgemeiner definieren und zwar für nicht orientierbare Flächen oder Flächen mit Rand. Dies wird hier aber nicht benötigt.

(3) Man kann zeigen, dass jede geschlossene, orientierbare Fläche in einer Kontaktmannigfaltigkeit C^∞ -nahe zu einer konvexen Fläche liegt (siehe [7, Proposition 4.8.8]).

(4) Wie alle anderen kontaktgeometrischen Begriffe werden auch konvexe Flächen unter Kontaktomorphismen erhalten, wie man leicht nachrechnen kann.

Beispiel 3.9

Betrachte wieder (wie in Beispiel 3.3) $V \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$. Der Rand ∂V ist eine orientierte, geschlossene Fläche. Das Vektorfeld $X := x \partial_x + y \partial_y$ ist transversal zu ∂V . Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_X \alpha_n &= d(\iota_X \alpha_n) + \iota_X(d\alpha_n) \\ &= d(x \cos(n\theta) - y \sin(n\theta)) + \iota_X(-n \sin(n\theta) d\theta \wedge dx - n \cos(n\theta) d\theta \wedge dy) \\ &= \cos(n\theta) dx - nx \sin(n\theta) d\theta - \sin(n\theta) dy - ny \cos(n\theta) d\theta + n \sin(n\theta) d\theta + n \cos(n\theta) d\theta \\ &= \alpha_n. \end{aligned}$$

Also ist X ein Kontaktvektorfeld für die konvexe Fläche $\partial V \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$.

Jetzt haben wir die konvexen Flächen in Analogie zu den Kontakthyperflächen in symplektischen Mannigfaltigkeiten definiert. Nun stellt sich natürlich die Frage, ob wir damit wirklich eine einfachere Beschreibung der Kontaktstruktur als mit der charakteristischen Blätterung bekommen. Dies werden wir im Folgenden sehen.

Definition 3.10 (Teilungsmenge).

Sei $S \subset (M, \xi)$ eine konvexe Fläche mit Kontaktvektorfeld X . Die **Teilungsmenge** von S ist

$$\Gamma_S := \{p \in S : X(p) \in \xi_p\}.$$

Bezeichne mit $\#\Gamma_S$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von Γ_S .

Bemerkung 3.11

(1) Diese Definition hängt von der Wahl des Kontaktvektorfeldes ab. Man kann aber zeigen, dass der Isotopietyp von Γ_S unabhängig von X ist, weswegen das Kontaktvektorfeld in der Notation weggelassen wird. Weiter wird auch der Isotopietyp der Teilungsmenge unter Kontaktomorphismen erhalten.

(2) Weiter unten werden wir sehen, dass die Teilungsmenge immer eine disjunkte Vereinigung von eingebetteten Kreisen ist.

Zuerst ein Beispiel dazu.

Beispiel 3.12

In Beispiel 3.9 wurde gezeigt, dass $X = x \partial_x + y \partial_y$ ein Kontaktvektorfeld für die konvexe Fläche $\partial V \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$ ist. Die Teilungsmenge ist nun die Menge, an denen X tangential zu den Kontaktebenen ist, also alle Punkte auf ∂V für die

$$\alpha_n(X) = x \cos(n\theta) - y \sin(n\theta) = 0$$

gilt. Die Teilungsmenge von ∂V zu dem Kontaktvektorfeld X ist also

$$\Gamma_{\partial V} = \left\{ \left(\theta, \pm \sin(n\theta), \pm \cos(n\theta) \right) \right\}.$$

(Betrachte dazu auch die Abbildung unten für den Fall $n = 1$. Die Teilungsmenge ist in rot dargestellt.)

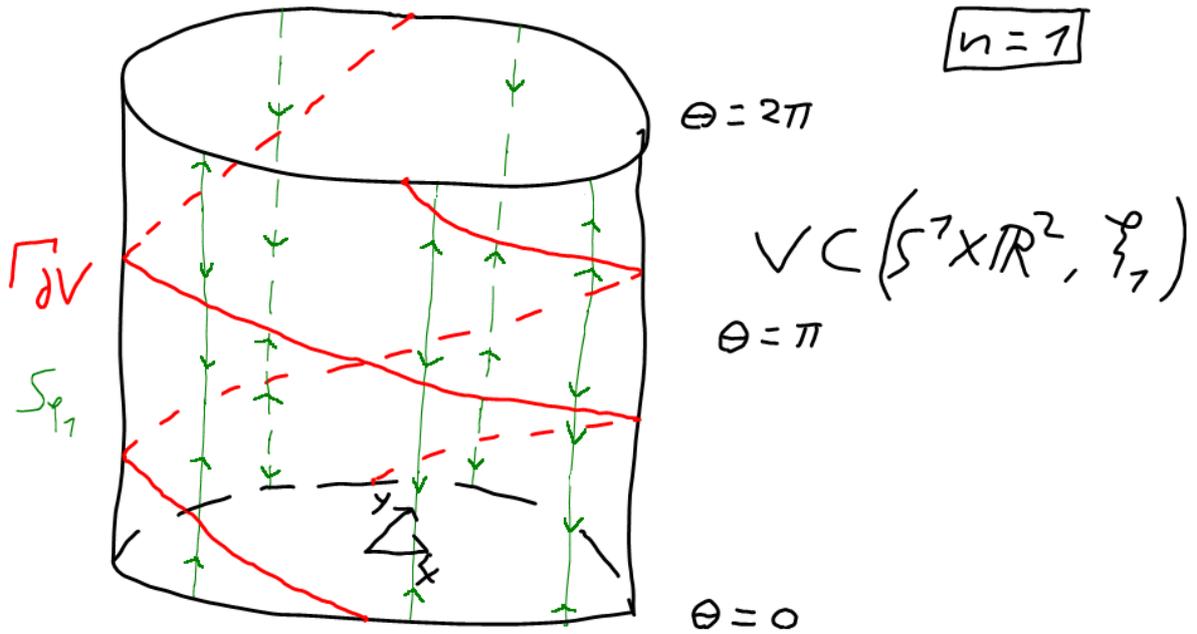


Abbildung 3.1: Die charakteristische Blätterung und die Teilungsmenge der konvexen Fläche ∂V bezüglich der Kontaktstruktur ξ_1

In diesem Fall besteht die Teilungsmenge also aus zwei Kurven, das heißt $\#\Gamma_{\partial V} = 2$. Hier sieht man dann auch, dass die Kontaktstrukturen ξ_n paarweise nicht isotop sind. Denn wenn ξ_n isotop zu ξ_m ist, dann ist $\Gamma_{\partial V, \xi_n}$ isotop zu $\Gamma_{\partial V, \xi_m}$ und dies ist offensichtlich nur der Fall für $n = m$.

Die Behauptung ist nun, dass diese Teilungsmenge im Wesentlichen schon die Kontaktstruktur beschreibt. Um dies einzusehen braucht man noch eine weitere Definition.

Definition 3.13 (Teilung einer Blätterung).

Sei \mathfrak{F} eine eindimensionale, singuläre Blätterung auf einer geschlossenen Fläche S . Eine disjunkte Vereinigung Γ von eingebetteten einfach geschlossenen Kurven in S , die transversal zu \mathfrak{F} sind, **teilt** \mathfrak{F} , wenn eine Volumenform Ω auf S und ein Vektorfeld X , welches \mathfrak{F} repräsentiert, existieren, so dass

- $\mathcal{L}_X \Omega \neq 0$ auf $S \setminus \Gamma$, und
- mit $S_{\pm} := \{p \in S : \pm d(\iota_X \Omega) > 0\}$ zeigt das Vektorfeld X entlang Γ aus S_+ heraus.

Im obigen Bild sieht man sofort, dass diese Teilungsmenge die charakteristische Blätterung in diesem Beispiel wirklich teilt, dies gilt immer, wie folgender Satz zeigt.

Korollar 3.14.

Die Teilungsmenge einer konvexen Fläche teilt die charakteristische Blätterung dieser Fläche. Die Teilungsmenge ist also insbesondere eine disjunkte Vereinigung von einfach geschlossenen Kurven auf der konvexen Fläche.

Beweis.

Der Beweis ist nicht schwierig, für den Rest dieser Arbeit aber nicht von Bedeutung (deswegen siehe [7, Seite 230-231]). \square

Satz 3.15 (Giroux-Flexibilität).

Sei $S \subset (M, \xi)$ eine konvexe Fläche in einer Kontaktmannigfaltigkeit, sei \mathfrak{F} eine eindimensionale, singuläre Blätterung von S , die durch die Teilungsmenge Γ_S von S geteilt wird, und sei $U(S)$ eine beliebige Umgebung von S in M .

Dann gibt es eine Isotopie $\psi_t : S \rightarrow U(S)$ ($t \in [0, 1]$) von Einbettungen mit

- ψ_0 ist die Inklusion $S \subset M$,
- $\psi_t(S)$ ist eine konvexe Fläche mit Teilungsmenge $\psi_t(\Gamma_S)$ für alle $t \in [0, 1]$ und
- die charakteristische Blätterung $(\psi_1(S))_\xi$ stimmt mit $\psi_1(\mathfrak{F})$ überein.

Beweis. siehe [7, Satz 4.8.11] \square

Bemerkung 3.16

Zusammen mit Satz 3.4 zeigt dieser Satz die volle Stärke der konvexen Flächen, denn der obige Satz sagt, dass die Teilungskurven (nach einer beliebig kleinen Störung) die charakteristische Blätterung bestimmen und diese bestimmt nach Satz 3.4 die Kontaktstruktur in einer Umgebung der Fläche. Man kann also Chirurgiekonstruktionen so ausführen, dass die Kontaktstruktur erhalten bleibt, solange man dafür sorgt, dass die Teilungskurven auf den Flächen, die man zusammenklebt, die selben sind.

Dies ist allerdings ein Phänomen, das nur im Dreidimensionalen auftritt. Diese Sätze lassen sich so nicht auf höhere Dimensionen ausweiten.

Im folgenden Kapitel soll die Kontakt-Dehn-Chirurgie eingeführt werden. Man möchte also Volltori aus einer Kontaktmannigfaltigkeit herausschneiden und dann Volltori wieder hereinkleben. Dabei soll die Kontaktstruktur erhalten bleiben. Deswegen wird im Folgenden der Fall eines Volltorus mit Kontaktstruktur betrachtet, bezüglich derer der Rand des Volltorus eine konvexe Fläche ist.

Definition 3.17 (Steigung).

Sei $V \subset (M, \xi)$ ein Volltorus mit konvexem Rand ∂V in einer Kontaktmannigfaltigkeit (M, ξ) mit straffer Kontaktstruktur ξ . Bei Festlegung eines Meridians μ und einer Longitude λ auf ∂V (siehe Anfang von Kapitel 4 für eine genaue Definition) kann man ∂V mit $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ durch

$$\begin{aligned}\mu &\equiv \{(t, 0) : t \in [0, 1]\} \\ \lambda &\equiv \{(0, t) : t \in [0, 1]\}\end{aligned}$$

identifizieren. Mittels dieser Identifikation erhalten wir:

Steigung von $\mu =: s(\mu) = 0$

Steigung von $\lambda =: s(\lambda) = \infty$

Nach Korollar 3.14 ist die Teilungsmenge $\Gamma_{\partial V}$ eine disjunkte Einbettung von Kreisen in ∂V , welche wir **Teilungskurven** nennen. Nach einem Diffeomorphismus isotop zur Identität, welcher einer anderen Wahl eines Kontaktvektorfeldes entspricht, kann man annehmen, dass die Teilungskurven linear und parallel in $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sind. (Dies geht, da die Kontaktstruktur straff sein soll und es somit nach dem Giroux-Kriterium keine auf ∂V zusammenziehbaren Teilungskurven geben kann, dafür siehe [7, Satz 4.8.13].)

Die Steigung der Teilungskurven heißt dann **Steigung** des konvexen Torus ∂V und wird mit $s(\partial V)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.18

Die Steigung eines konvexen Torus ist immer rational, da lineare Kurven auf einem Torus genau dann geschlossen sind, wenn sie rationale Steigung haben (dafür siehe zum Beispiel [12, Proposition 14.1]).

Beispiel 3.19

Betrachte wieder wie in den vorigen Beispielen die konvexe Fläche $\partial V \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n)$, wobei $\partial V = \{x^2 + y^2 = 1\}$.

(1) Ein Meridian ist gegeben durch

$$\mu := \{(0, \cos \varphi, \sin \varphi) : \varphi \in S^1\}$$

und eine Longitude zum Beispiel durch

$$\lambda := \{(\theta, \sin(n\theta), \cos(n\theta)) : \theta \in S^1\}.$$

Mittels dieser Identifikation mit $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ erhalten wir $s(\partial V) = s(\Gamma_{\partial V}) = s(\lambda) = \infty$.

(2) Ein weitere Identifikation mit $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist gegeben durch

$$\mu := \left\{ (0, \cos \varphi, \sin \varphi) : \varphi \in S^1 \right\}$$

und

$$\lambda := \left\{ (\theta, 1, 0) : \theta \in S^1 \right\}.$$

Dann gilt für die Steigung $s(\partial V) = s(\Gamma_{\partial V}) = -\frac{1}{n}$ (siehe auch Abbildung 3.1 für den Fall $n = 1$).

(3) Eine Kontaktstruktur mit Steigung ∞ bezüglich dieser Identifikation mit $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist durch die Kontaktform $dx + y d\theta$ gegeben. Denn dann gilt:

$$\mathfrak{L}_{\partial_x + y \partial_y}(dx + y d\theta) = \iota_{\partial_x + y \partial_y}(dy \wedge d\theta) + d(x) = y d\theta + dx.$$

Also ist ∂V auch eine konvexe Fläche für diese Kontaktstruktur. Die Teilungsmenge ist dann

$$\Gamma_{\partial V} = \left\{ (dx + y d\theta)(\partial_x + y \partial_y) \right\} = \{x = 0\}.$$

Somit ist die Steigung $s(\partial V) = s(\Gamma_{\partial V}) = \infty$.

Es gibt also straffe Kontaktstrukturen auf $S^1 \times D^2$ mit konvexem Rand, so dass es genau zwei Teilungskurven mit Steigung $\frac{1}{n}$ gibt. Jetzt stellt sich natürlich die Frage, ob es für jede rationale Zahl eine solche Kontaktmannigfaltigkeit mit dieser rationalen Zahl als Steigung gibt und ob diese Kontaktstrukturen eindeutig sind. Die Antwort gibt der folgende Satz.

Satz 3.20 (Klassifikation straffer Kontaktstrukturen auf Volltori).

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ (auch 0) existiert genau eine (bis auf Isotopie, welche den Rand fest lässt) straffe Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ mit festgelegtem konvexem Rand $\partial(S^1 \times D^2)$, so dass $\#\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)} = 2$ und Steigung $s(\partial(S^1 \times D^2)) = \frac{1}{n}$.

Weiter gibt es für jedes $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mindestens eine straffe Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ mit festgelegtem konvexem Rand $\partial(S^1 \times D^2)$, so dass $\#\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)} = 2$ und Steigung $s(\partial(S^1 \times D^2)) = r$.

Beweisskizze. (für einen genaueren Beweis siehe [11, Satz 5.1.30] oder [10, Satz 2.3])

Im vorigen Beispiel wurden genau solche Kontaktstrukturen mit Steigung $\frac{1}{n}$ konstruiert. Zu zeigen bleibt also die Eindeutigkeit im Fall $\frac{1}{n}$.

Ein k -facher Dehn-Twist ($k \in \mathbb{Z}$) entlang eines Meridians ist der Diffeomorphismus von $\partial(S^1 \times D^2)$, bei dem der Torus entlang einer meridionalen Scheibe aufgeschnitten wird,

dann k -mal verdreht wird und anschließend wieder zusammengeklebt wird.

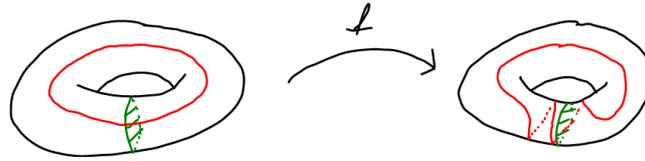


Abbildung 3.2: Ein Dehn-Twist entlang eines Meridians

Ein solcher Dehn-Twist erweitert zu einem Diffeomorphismus über den Volltorus $S^1 \times D^2$. Die Erweiterung eines Dehn-Twists ist gegeben durch

$$(\theta, x, y) \mapsto \left(\theta, x \cos(k\theta) + y \sin(k\theta), -x \sin(k\theta) + y \cos(k\theta) \right).$$

(siehe auch Beispiel 2.5). Wenn man nun zeigen kann, dass der Satz für Steigung $-\frac{1}{n}$ gilt, dann gilt er auch für Steigung $-\frac{1}{n-k}$, da man die Kontaktstrukturen mit Steigung $-\frac{1}{n}$ mit einem k -fachen Dehn-Twist auf Kontaktstrukturen mit Steigung $-\frac{1}{n-k}$ abbilden kann und umgekehrt (siehe Beispiel 2.5, Beispiel 3.19 und Bild unten). Es reicht also diesen Satz für Steigung 1 zu beweisen. Dabei ist die Idee die folgende:

Man schneidet den Volltorus entlang einer meridionalen Scheibe auf. Die resultierende Kontaktmannigfaltigkeit ist ein 3-Ball (nach Glättung des Winkels). Dabei soll die meridionale Scheibe so gewählt werden, dass der Rand dieses 3-Balles eine konvexe Fläche mit zusammenhängender Teilungsmenge ist (um zu zeigen, dass dies geht müsste man noch ein wenig arbeiten). Ein Resultat von Eliashberg [5, Satz 2.1.3] besagt nun, dass ein 3-Ball mit konvexem Rand und zusammenhängender Teilungsmenge eine eindeutige straffe Kontaktstruktur (bis auf Isotopie fest am Rand) besitzt. (In Abbildung 3.3 auf der nächsten Seite ist dies dargestellt. Im Allgemeinen muss man natürlich eine andere meridionale Scheibe als $\{\theta = 0\}$ wählen um das oben geforderte zu erreichen.)

In [10, Satz 2.3] wird sogar eine vollständige Auflistung aller straffer Kontaktstrukturen auf $S^1 \times D^2$ mit festgelegtem konvexem Rand $\partial(S^1 \times D^2)$ gegeben, so dass $\#\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)} = 2$ und Steigung $s(\partial(S^1 \times D^2)) = r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist. Insbesondere folgt also, dass es zu jedem $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mindestens eine solche Kontaktstruktur gibt. \square

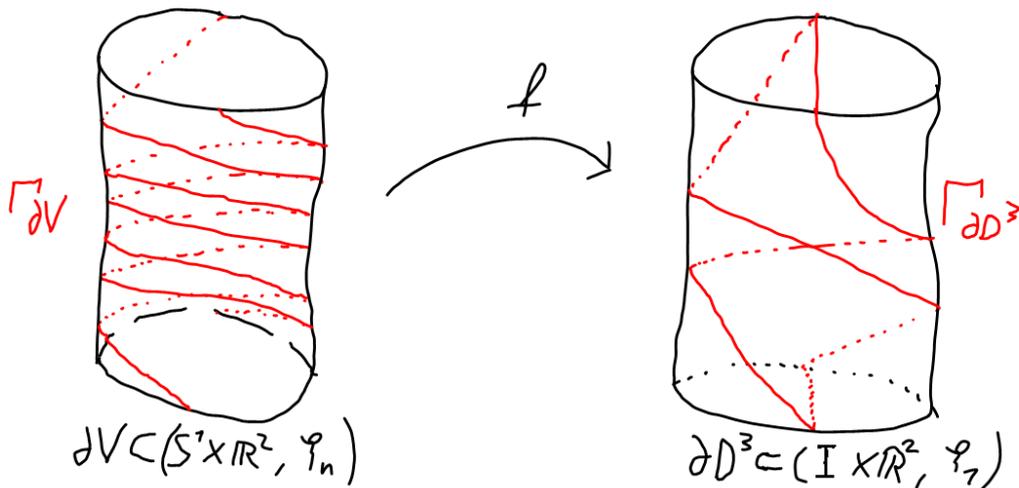


Abbildung 3.3: Dehn-Twist entlang eines Meridians und Aufschneiden des Volltorus zu einem Dreiball mit zusammenhängender Teilungsmenge

Bemerkung 3.21

Jetzt kann man sich noch fragen, was im Falle Steigung null passiert.

Nehmen wir zuerst an, dass es eine Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ gibt, so dass $\partial(S^1 \times D^2)$ eine konvexe Fläche mit zwei linearen und parallelen Teilungskurven mit Steigung null ist. Diese Kontaktstruktur ist dann in jedem Fall überdreht, denn da die Teilungskurven Steigung null haben, entsprechen diese Teilungskurven Meridianen, die gleichzeitig Legendre Knoten sind. Diese beranden zweidimensionale Scheiben, die man so einbetten kann, dass sie an ihren Rändern transversal zu den Kontaktebenen stehen. So kann man überdrehte Scheiben erhalten.

Weiter kann man solche Kontaktstrukturen relativ leicht explizit mit einer Methode, die Lutz-Twist genannt wird, konstruieren. Dafür siehe zum Beispiel [2, Seiten 586-587].

4 Kontaktchirurgie

In diesem Kapitel soll die Kontakt-Dehn-Chirurgie definiert werden (wie sie in [1] eingeführt wurde), das heißt Dehn-Chirurgie an einem Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit, so dass die entstehende Mannigfaltigkeit wieder eine Kontaktstruktur trägt und diese außerhalb einer Tubenumgebung des Knotens wie die alte Kontaktstruktur aussieht. Dabei wird das Hauptwerkzeug die Theorie konvexer Flächen aus Kapitel 3 sein.

Im Anschluss werden einige fundamentale Sätze über oder mit Kontaktchirurgie bewiesen und im nächsten Kapitel dann einige einfache Anwendungen dieser Ergebnisse vorgestellt.

Aber zuerst werden einige Grundkonzepte der Dehn-Chirurgie für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten wiederholt (für genauere Informationen darüber siehe [12, Kapitel 6] oder [13, Kapitel 9]).

Betrachte einen Knoten K in einer orientierten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M . Sei νK eine Tubenumgebung von K in M . (Dann ist νK diffeomorph zu einem Volltorus $S^1 \times D^2$.) Auf dem Rand dieser Tubenumgebung gibt es nun zwei spezielle Kurven:

- Den **Meridian** μ : Eine einfach geschlossene Kurve auf $\partial(\nu K) (\cong S^1 \times S^1)$, welche einen Erzeuger von $H_1(\partial(\nu K); \mathbb{Z})$ repräsentiert, aber in νK nullhomolog ist.
- Die **Longitude** λ : Eine einfach geschlossene Kurve auf $\partial(\nu K)$, die μ transversal in genau einem Punkt schneidet.

Dabei sollen die beiden Kurven so orientiert sein, dass das Paar (μ, λ) die positive Orientierung von $\partial(\nu K)$ in M liefert. (Mit der Regel: Äußere Normale zuerst.) Man kann nun zeigen, dass diese Bedingungen den Meridian μ bis auf Isotopie festlegen. Doch die Longitude λ ist dadurch noch **nicht** eindeutig bestimmt. Für eine gegebene Longitude λ sind weitere Longituden durch $\tilde{\lambda} = \lambda + n\mu$ gegeben, wobei $n \in \mathbb{Z}$.

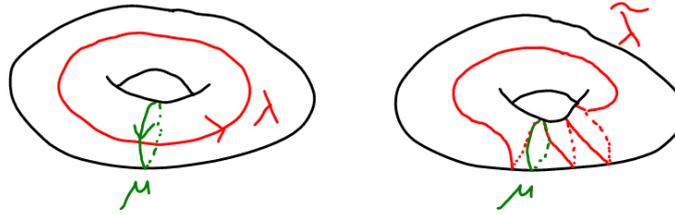


Abbildung 4.1: Verschiedene Wahlen von Longituden

Sei nun $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ mit p, q koprim und $g: \partial(S^1 \times D^2) \rightarrow \partial(\nu K)$ ein Diffeomorphismus mit:

$$\{*\} \times S^1 =: \mu_0 \xrightarrow{g} p\mu + q\lambda$$

(Dabei bedeutet $r = \infty$, dass $p = \pm 1$ und $q = 0$ ist.)

Dann definiere:

$$M' := (\overline{M \setminus (\nu K)} + (S^1 \times D^2)) / \sim$$

wobei $\partial(S^1 \times D^2) \ni x \sim g(x) \in \partial(\nu K)$ und $\overline{M \setminus (\nu K)}$ den Abschluss dieser Menge bezeichnet.

Man sagt dann, M' entsteht aus M durch **Dehn-Chirurgie** entlang des Knotens K mit **Chirurgiekoeffizient** r .

Nun kann man folgenden Satz zeigen (siehe [13, Kapitel 9.F]).

Satz 4.1 (Dehn-Chirurgie).

M' ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit und bei festgelegter Longitude λ durch den Chirurgiekoeffizienten r (und natürlich den Isotopietyp von K und den Diffeomorphietyp von M) bis auf Diffeomorphie eindeutig bestimmt.

Wenn man nun einen Knoten K in S^3 (oder allgemeiner in einer Mannigfaltigkeit, in welcher der Knoten nullhomolog ist) betrachtet, dann kann man eine Longitude λ durch die Forderung $lk(K, \lambda) = 0$ eindeutig festlegen. Dabei bezeichnet lk die Verschlingungszahl (siehe [12, Kapitel 6.15] oder [7, Kapitel 3.4.3]). Für allgemeine Mannigfaltigkeiten ist solch eine natürliche Wahl allerdings nicht gegeben.

Betrachtet man nun Knoten in Kontaktmannigfaltigkeiten, so stellen sich zwei natürliche Fragen, die wir im Folgenden beantworten wollen:

1. Gibt es natürliche Longituden auf Tubenumgebungen spezieller Knoten in Kontaktmannigfaltigkeiten?
2. Wenn wir eine Dehn-Chirurgie in einer Kontaktmannigfaltigkeit ausführen, gibt es dann eine Kontaktstruktur auf der resultierenden Mannigfaltigkeit, die außer-

halb einer Tubenumgebungen des Knotens mit der alten Kontaktstruktur übereinstimmt?

Für Legendre-Knoten in Kontaktmannigfaltigkeiten, lässt sich die erste Frage positiv beantworten, wie im folgenden gezeigt wird.

Definition 4.2 (Kontaktrahmung).

Sei $K : S^1 \rightarrow (M, \xi)$ ein Legendre-Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit. Wähle eine spezielle Longitude λ auf dem Rand einer Tubenumgebung $\partial(\nu K)$ durch Verschiebung von K in eine Richtung tangential zu $\xi|_{TK}$ aber transversal zu K . Die zugehörige Rahmung heißt **Kontaktrahmung**.

Bemerkung 4.3

(1) Dies ist wohldefiniert, denn wegen $T_p K \subset \xi_p$ für alle $p \in K$ spaltet das Normalenbündel von K in M in zwei triviale Geradenbündel

$$(TM|_K)/TK = (TM|_K)/(\xi|_K) \oplus (\xi|_K)/TK.$$

Dies liefert eine Trivialisierung des Normalenbündels, welche man als die obige Rahmung auffassen kann. (Dazu betrachte auch die lokal Skizze unten. Im Globalen wird sich der parallele Knoten im Allgemeinen mehrere Male um den alten Knoten herumwinden.)

(2) Dies ist einer der wenigen Punkte an denen benötigt wird, dass die Kontaktstruktur koorientiert ist. Natürlich geht dies so auch nur in Dimension drei.

(3) In diesem speziellen Fall entspricht eine Rahmung eines Knotens einfach der Wahl einer festen Longitude des Knotens. Man braucht also die allgemeine Definition nicht zu kennen.

(4) Analog kann man auch dieselbe Rahmung erhalten, indem man K in eine Richtung transversal zu $\xi|_{TK}$ verschiebt. (Dies kann man auch in der Skizze unten sehen.)

(5) Die Rahmung eines nullhomologen Knotens K , die durch die Forderung $lk(K, \lambda) = 0$ bestimmt ist, heißt **Flächenrahmung**.

(6) Natürlich unterscheidet sich die Kontaktrahmung im Allgemeinen von der Flächenrahmung. Aber man kann sie leicht ineinander umrechnen (dazu später mehr in Kapitel 5).

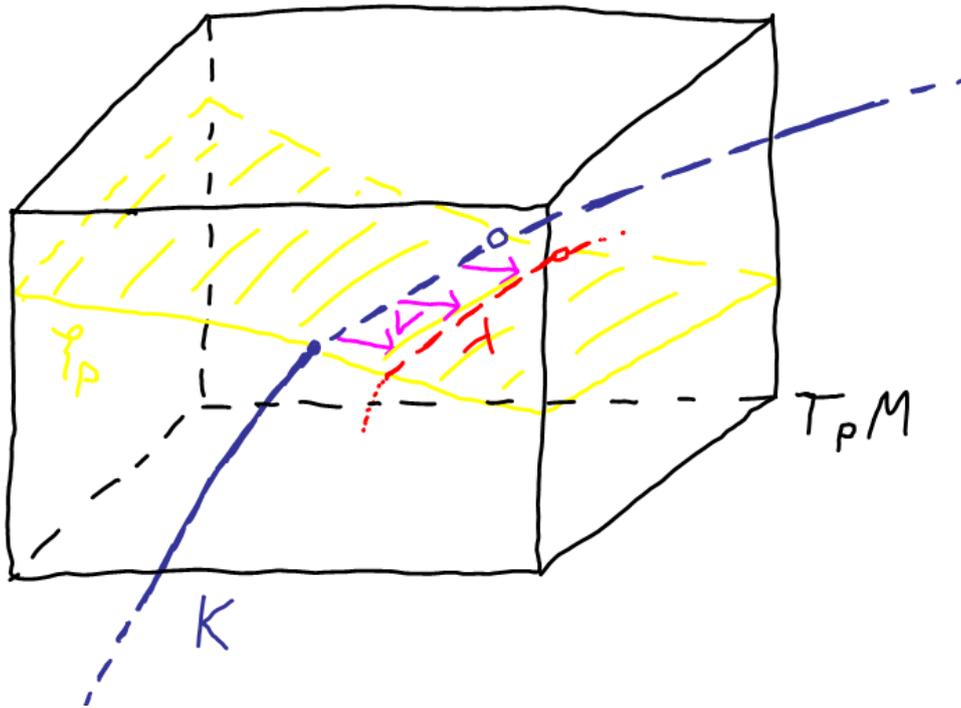


Abbildung 4.2: lokales Bild einer Kontaktrahmung eines Legendre-Knotens

Beispiel 4.4

Betrachte $V := \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n = \ker(\cos(n\theta) dx - \sin(n\theta) dy))$ wie in den alten Beispielen. Dann ist V eine Tubenumgebung des Legendre-Knotens

$$S^1 \ni \theta \mapsto (\theta, 0, 0) \in (S^1 \times \mathbb{R}^2, \xi_n).$$

Der Meridian μ ist also bis auf Isotopie eindeutig bestimmt. Die zur Kontaktrahmung gehörende Longitude λ erhält man, indem man den Knoten in die Richtung eines Vektorfeldes R transversal zu dem Knoten, aber tangential zu der Kontaktstruktur ξ_n verschiebt. Damit ein Vektorfeld transversal zu diesem Knoten ist, darf es keinen Anteil in θ -Richtung haben, also muss R von der Form $R(\theta, x, y) = a(\theta, x, y) \partial_x + b(\theta, x, y) \partial_y$ sein. Weiter ist das Vektorfeld R genau dann tangential an die Kontaktebenen, wenn $\alpha_n(R) = 0$. Also betrachte:

$$\alpha_n(R) = a(\theta, x, y) \cos(n\theta) - b(\theta, x, y) \sin(n\theta) = 0$$

Eine Möglichkeit das Vektorfeld zu wählen ist also offensichtlich:

$$R(\theta, x, y) = \sin(n\theta) \partial_x + \cos(n\theta) \partial_y$$

Dieses Vektorfeld ist natürlich nicht eindeutig, aber die zugehörige Longitude ist bis auf Isotopie dieselbe. Wenn man nun den Knoten in Richtung dieses Vektorfeldes auf den Rand von V verschiebt, erhält man:

$$\lambda = \left\{ (\theta, \sin(n\theta), \cos(n\theta)) : \theta \in S^1 \right\}$$

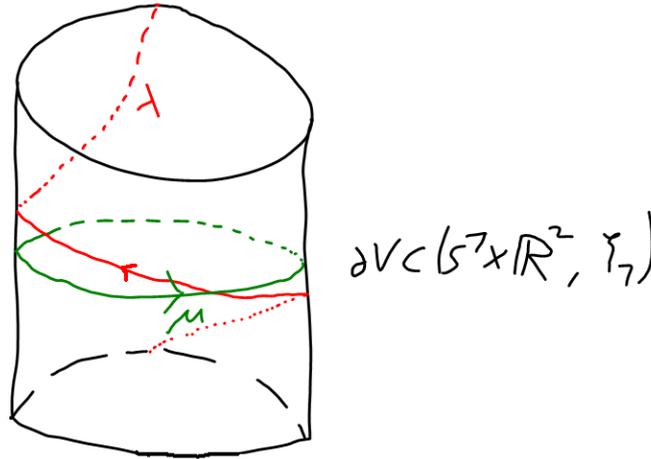


Abbildung 4.3: Kontaktrahmung des Legendre-Standardknotens im Fall $n = 1$

Diese Longitude ist übrigens genau eine der Teilungskurven, wie in Beispiel 3.12 beschrieben.

Jeder Legendre-Knoten besitzt also eine natürliche Longitude. Bezüglich dieser Longitude kann man nun eine Chirurgie definieren. Die folgende Definition wird die zweite Frage aus der Einleitung auch positiv beantworten.

Definition und Satz 4.5 (Kontakt-Dehn-Chirurgie).

Sei K ein Legendre-Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit (M, ξ) und sei M' die dreidimensionale Mannigfaltigkeit, welche aus M durch Chirurgie entlang K mit Chirurgiekoeffizient $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bezüglich der Kontaktrahmung entstanden ist. Dann trägt M' eine Kontaktstruktur ξ' , so dass $\xi|_{T(M \setminus \nu K)} = \xi'$. (Die Kontaktstrukturen sind also außerhalb einer Tubenumgebung des Knotens gleich.)

Man sagt (M', ξ') ist durch **Kontaktchirurgie** entlang K mit Chirurgiekoeffizient r aus (M, ξ) entstanden.

Weiter gilt: Wenn $r \neq 0$ ist, dann ist $\xi'|_{S^1 \times D^2}$ straff (hier bezeichnet $S^1 \times D^2$ den neu hereingeklebten Volltorus), ist aber $r = 0$, so ist ξ' überdreht.

Bemerkung 4.6

(1) Die Kontaktstruktur ξ' ist im Allgemeinen **nicht** eindeutig, später werden wir aber eine Situation betrachten, in der sie eindeutig ist.

(2) Selbst wenn ξ eine straffe Kontaktstruktur auf M und $r \neq 0$ ist, dann ist es überhaupt nicht klar, ob die neue Kontaktstruktur ξ' auf M' auch straff ist. Eine überdrehte Scheibe könnte teilweise in der alten Mannigfaltigkeit und teilweise in dem neu hereingeklebten Volltorus liegen.

Beweis von Satz 4.5.

Wir haben gesehen, dass die resultierende Mannigfaltigkeit nicht von der Wahl der Tubenumgebung abhängt. Die Idee ist es nun eine Tubenumgebung des Knotens so zu wählen, dass ihr Rand eine konvexe Fläche ist. In Kapitel 3 haben wir gesehen (Satz 3.4 und Satz 3.15), dass die Kontaktstruktur in einer Umgebung der konvexen Fläche im Wesentlichen schon durch ihre Teilungsmenge bestimmt ist. Es reicht also eine Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ anzugeben, bezüglich derer der Rand $\partial(S^1 \times D^2)$ eine konvexe Fläche deren Teilungsmenge unter der Anklebeabbildung g auf die Teilungsmenge des konvexen Randes der Tubenumgebung abgebildet wird, denn dann könnten wir diesen Volltorus in die Kontaktmannigfaltigkeit, aus der die Tubenumgebung des Knotens entfernt wurde, hereinkleben und zwar so, dass die Kontaktstrukturen auf den einzelnen Komponenten zu einer globalen Kontaktstruktur auf der neuen Mannigfaltigkeit erweitern. Genauer:

Nach dem Umgebungssatz für Legendre-Knoten existiert eine Kontakteinbettung

$$f: (S^1 \times D_2, \xi_1) \hookrightarrow (M, \xi)$$

auf eine Tubenumgebung des Knotens K .

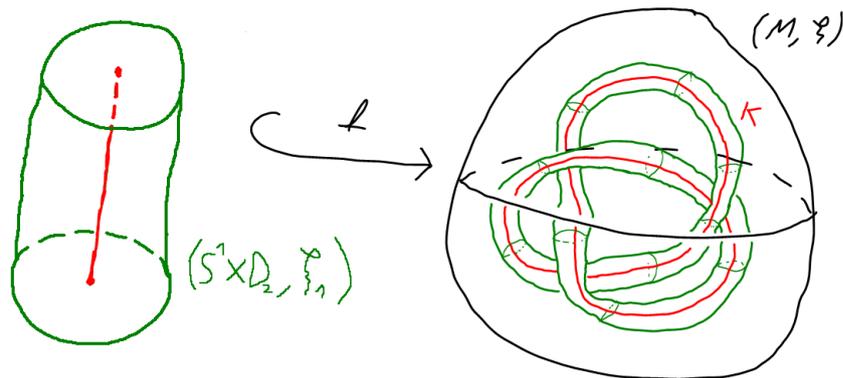


Abbildung 4.4: Die Kontakteinbettung $f : (S^1 \times D_2, \xi_1) \hookrightarrow (M, \xi)$

Wir können also unseren Legendre-Knoten K mit dem Legendre-Standardknoten

$$S^1 \ni \theta \mapsto (\theta, 0, 0) \in (S^1 \times D_2, \xi_1)$$

identifizieren. In diesem lokalen Modell lässt sich nun leichter arbeiten. In Beispiel 4.4 oben haben wir gesehen, dass $V = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ eine Tubenumgebung von K ist. Auf dieser wollen wir nun die Chirurgie ausführen. Sei nun $r = \frac{p}{q}$ mit p, q koprim, weiter sei

$$g: \partial(S^1 \times D^2) \longrightarrow \partial V$$

ein Diffeomorphismus mit

$$\mu_0 \longmapsto p\mu + q\lambda.$$

(Eine solche Abbildung existiert immer. Wenn man $\partial(S^1 \times D^2)$ als Teilmenge von \mathbb{C}^2 auffasst, kann man eine solche Abbildung in Polarkoordinaten leicht hinschreiben.) Nun schneiden wir die Tubenumgebung V des Legendre-Knotens K heraus und kleben einen Volltorus $S^1 \times D^2$ mittels g wieder herein, also:

$$M' := \left(\overline{M \setminus f(V)} + S^1 \times D^2 \right) / \sim$$

wobei $\partial(S^1 \times D^2) \ni x \sim f(g(x)) \in \partial(f(V))$.

Topologisch liefert dies also nach Satz 4.1 eine wohldefinierte dreidimensionale Mannigfaltigkeit M' , die unabhängig von den getroffenen Wahlen ist. Um den Beweis zu beenden muss noch eine entsprechende Kontaktstruktur auf M' konstruiert werden.

In Beispiel 3.12 und Beispiel 4.4 haben wir gesehen, dass $\partial V \subset (S^1 \times D_2, \xi_1)$ eine konvexe Fläche mit $\#\Gamma_{\partial V} = 2$ und Teilungsmenge

$$\Gamma_{\partial V} = \left\{ (\theta, \pm \sin \theta, \pm \cos \theta) : \theta \in S^1 \right\} = \{ \pm \lambda \}$$

ist. Wir benötigen nun also eine Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$, bezüglich derer der Rand $\partial(S^1 \times D^2)$ eine konvexe Fläche mit genau zwei Teilungskurven ist und deren Teilungskurven unter g auf die Teilungskurven von ∂V abgebildet werden.

Im Klassifikationssatz straffer Kontaktstrukturen auf Volltori (Satz 3.20) und in der folgenden Bemerkung haben wir gesehen, dass es im Falle zweier Teilungskurven, für jede mögliche Steigung dieser Teilungskurven mindestens eine solche Kontaktstruktur gibt. Für Steigung null ist eine solche Kontaktstruktur überdreht, bei allen anderen Steigungen kann diese Kontaktstruktur straff gewählt werden.

Nun wählt man eine solche Kontaktstruktur ξ_g auf $S^1 \times D^2$. (Diese hängt natürlich entscheidend von der Abbildung g ab.) Wenn man nun den konvexen Rand $\partial(S^1 \times D^2)$ mit g auf ∂V abbildet, sind die Teilungskurven dieselben, also kann man mit der Giroux-Flexibilität (Satz 3.15) annehmen, dass die charakteristischen Blätterungen schon dieselben sind. (Das heißt man isotopiert $\partial(S^1 \times D^2)$ in einem leicht verdicktem Volltorus zu einer konvexen Fläche mit der richtigen charakteristischen Blätterung. Diese neue Fläche ist dann wieder der Rand eines Volltorus.) Dann kann man mit Satz 3.4 schließen, dass die Kontaktstrukturen in einer Umgebung der Fläche (also einmal in $S^1 \times D^2$ und einmal in $\overline{M \setminus f(V)}$) gleich aussehen. Also ist

$$\xi' := \begin{cases} \xi_g & \text{auf } S^1 \times D^2 \\ \xi & \text{auf } \overline{M \setminus f(V)} \end{cases}$$

eine auf M' wohldefinierte Kontaktstruktur.

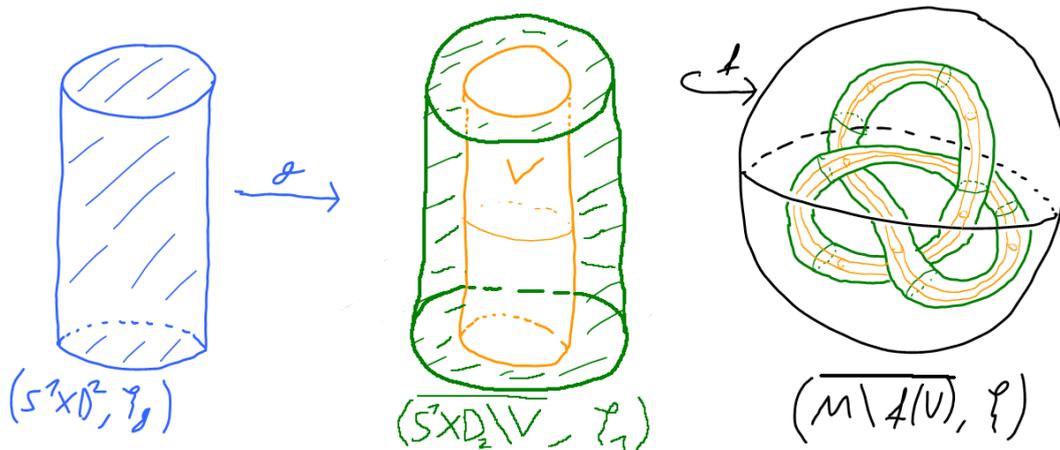


Abbildung 4.5: Kontaktchirurgie

Diese neue Kontaktstruktur hängt dann natürlich von den getroffenen Wahlen ab, also von der Kontakteinbettung f , dem Diffeomorphismus g und der Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$.

Um die Aussagen über Überdrehtheit und Straffheit der neuen Kontaktstruktur zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass man nur für Chirurgiekoeffizient $r = 0$ eine Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ mit Steigung null benötigt, denn diese ist die einzige, die überdreht gewählt werden muss.

Sei also eine Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ gegeben, so dass $\partial(S^1 \times D^2)$ eine konvexe

Menge mit zwei Teilungskurven und Steigung null ist. Dann gilt:

$$s(\mu_0) = 0 = s(\partial(S^1 \times D^2)) = s(\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)})$$

Wegen $\mu_0 \xrightarrow{g} p\mu + q\lambda$ und $\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)} \xrightarrow{g} \Gamma_{\partial V} = \{\pm\lambda\}$ gilt:

$$p\mu + q\lambda = g(\mu_0) = g(\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)}) = \pm\lambda$$

Eine solche überdrehte Kontaktstruktur wird also wirklich nur im Fall $p = r = 0$ benötigt. \square

Eine Kontaktchirurgie liefert also erneut eine Kontaktmannigfaltigkeit, deren Kontaktstruktur allerdings im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist. Wenn man nicht an der genauen Kontaktstruktur auf der entstehenden Mannigfaltigkeit interessiert ist, kann man hiermit schon einiges anfangen. Zum Beispiel kann man hiermit einen alternativen Beweis des Satzes von Martinet geben. (Der ursprüngliche Beweis funktioniert mit Chirurgie entlang transversalen Knoten. Das sind Knoten die immer transversal zu den Kontaktebenen stehen, dafür siehe [7, Satz 4.1.1].)

Korollar 4.7 (Satz von Martinet).

Jede dreidimensionale orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeit besitzt eine Kontaktstruktur.

Beweis.

Sei M eine solche Mannigfaltigkeit. Ohne Einschränkung können wir M als zusammenhängend voraussetzen.

Nach dem Satz von Dehn-Lickorish (siehe [12, Satz 12.4]) kann man M durch Chirurgie entlang einer Verschlingung in S^3 erhalten und S^3 trägt nach Beispiel 2.21 (1) eine Kontaktstruktur. Jetzt kann man nach dem Approximationssatz für Legendre-Knoten die Verschlingung durch eine Legendre-Verschlingung approximieren. Dies ändert den Diffeomorphietyp von M nach Satz 4.1 nicht. Wie wir eben gesehen haben, trägt M dann eine Kontaktstruktur. \square

Proposition 4.8 (Eindeutigkeitssatz).

Sei (M', ξ') eine Kontaktmannigfaltigkeit, welche aus (M, ξ) durch Kontaktchirurgie entlang eines Legendre-Knotens K mit Chirurgiekoeffizient $r = \frac{1}{n}$ (wobei $n \in \mathbb{Z}$, auch 0 ist erlaubt) entstanden ist. Dann ist (M', ξ') eindeutig, das heißt unabhängig von der Kontakteinbettung f , dem Diffeomorphismus g und der Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$. (M', ξ')

hängt also nur von dem Chirurgiekoeffizienten $r = \frac{1}{n}$ (und natürlich von (M, ξ) und K) ab.

Bemerkung 4.9

- (1) Diese Eindeutigkeitsaussage gilt natürlich nur bis auf Kontaktmorphie, genau wie bei ähnlichen Aussagen im weiteren Teil dieser Arbeit.
- (2) Allerdings können verschiedene Legendre-Knoten verschiedene Kontaktstrukturen liefern, auch wenn sie topologisch isotop sind (weiteres dazu in Kapitel 5).

Beweis von Proposition 4.8.

Zu zeigen ist also, dass die neue Kontaktmannigfaltigkeit (M', ξ') (bis auf Kontaktmorphie) nicht von den Wahlen in der vorigen Konstruktion abhängt. Im Wesentlichen liegt dies daran, dass es genau eine solche straffe Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ mit Steigung $\frac{1}{n}$ gibt, wie sie in der obigen Konstruktion benötigt wird (siehe Klassifikationssatz 3.20). Man muss allerdings dennoch ein wenig arbeiten.

Zuerst betrachten wir, welche Wahlmöglichkeiten wir bei dem Diffeomorphismus g haben.

Ein Diffeomorphismus $g: \partial(S^1 \times D^2) \rightarrow \partial V$ ist bis auf Isotopie durch seine Wirkung auf Homologieebene festgelegt, das heißt durch das Bild des Meridians und das Bild einer Longitude. Die Isotopieklasse von g entspricht also einer Matrix aus $SL_2(\mathbb{Z})$. Für den Meridian μ_0 gilt nach Wahl des Chirurgiekoeffizienten:

$$\mu_0 \xrightarrow{g} \mu + n\lambda$$

Für die Longitude $\lambda_0 := S^1 \times \{p\}$ von $\partial(S^1 \times D^2)$ gibt es dann verschiedene Wahlmöglichkeiten. Da aber die Isotopieklasse von g einem Element aus $SL_2(\mathbb{Z})$ entsprechen muss, sind die einzigen Möglichkeiten ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\lambda_0 \xrightarrow{g} \lambda - k(\mu + n\lambda)$$

(Verschiedene Wahlen von k entsprechen verschiedenen Wahlen der Longitude. Deswegen ist die Mannigfaltigkeit M' topologisch unabhängig von k .)

Dann wirkt g^{-1} wie folgt auf λ :

$$\lambda \xrightarrow{g^{-1}} k\mu_0 + \lambda_0$$

Man benötigt also eine straffe Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$, bezüglich derer der Rand

$\partial(S^1 \times D^2)$ eine konvexe Fläche mit genau zwei Teilungskurven mit Steigung

$$s(\partial(S^1 \times D^2)) = s(\Gamma_{\partial(S^1 \times D^2)}) = s(g^{-1}(\Gamma_{\partial V})) = s(g^{-1}(\pm\lambda)) = s(k\mu_0 + \lambda_0) = \frac{1}{k}$$

ist. Eine solche Kontaktstruktur ist nach dem Klassifikationssatz 3.20 eindeutig bis auf Isotopie, die den Rand fest lässt. Gegeben ist eine solche Kontaktstruktur durch ξ_{-k} aus Beispiel 2.3 (2) (siehe auch Beispiel 3.19). Wenn also die Kontakteinbettung f und der Diffeomorphismus g vorgegeben sind, dann ist die neue Kontaktmannigfaltigkeit (M', ξ') eindeutig.

Sei nun nur die Kontakteinbettung f vorgegeben. Wir wollen dann zeigen, dass die entstandene neue Kontaktmannigfaltigkeit (M', ξ') auch unabhängig von der Wahl von g ist.

Bezeichne mit (M'_k, ξ'_k) die Kontaktmannigfaltigkeit entstanden durch obige Kontaktchirurgie bezüglich g_k , wobei g_k obigen Diffeomorphismus mit der Wahl $\lambda_0 \mapsto \lambda - k(\mu + n\lambda)$ bezeichnet. Betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (M'_k, \xi'_k) & = & ((M \setminus f(V), \xi) + (S^1 \times D^2, \xi_{g_k})) / \sim \\ & & \begin{array}{ccc} \downarrow id & & \downarrow g_0^{-1} \circ g_k \end{array} \\ (M'_0, \xi'_0) & = & ((M \setminus f(V), \xi) + (S^1 \times D^2, \xi_{g_0})) / \sim \end{array}$$

Die Abbildung $g_0^{-1} \circ g_k$ ist ein Diffeomorphismus von $\partial(S^1 \times D^2)$. Dieser soll nun zu einem Kontaktomorphismus auf den Volltorus erweitert werden. Dazu betrachtet man die Abbildung wieder auf Homologieebene:

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_0 & \xrightarrow{g_k} & \mu + n\lambda & \xrightarrow{g_0^{-1}} & \mu_0 + n\lambda_0 - n\lambda_0 & = & \mu_0 \\ \lambda_0 & \xrightarrow{g_k} & (1 - kn)\lambda - k\mu & \xrightarrow{g_0^{-1}} & (1 - kn)\lambda_0 - k\mu_0 + kn\lambda_0 & = & \lambda_0 - k\mu_0 \end{array}$$

Die Abbildung $g_0^{-1} \circ g_k$ entspricht also einem $(-k)$ -fachen Dehn-Twist entlang des Meridians. Dieser erweitert zu einem Kontaktomorphismus der entsprechenden Kontaktstrukturen auf $S^1 \times D^2$ (siehe Beispiel 2.5 und Beweis von Satz 3.20). Die resultierende Kontaktmannigfaltigkeit ist also bei fester Wahl von f bis auf Kontaktomorphie eindeutig.

Seien nun f_1 und f_2 zwei Kontakteinbettungen $(S^1 \times D^2, \xi_1) \hookrightarrow (M, \xi)$.

Für $a > 0$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_a: (S^1 \times D_2, \xi_1) &\longrightarrow (S^1 \times D_{2a}, \xi_1) \\ (\theta, x, y) &\longmapsto (\theta, ax, ay) \end{aligned}$$

ein Kontaktomorphismus, wegen $\varphi_a^* \alpha_1 = \alpha_1 \circ T\varphi_a = a \alpha_1$.

Wenn man nun statt f_2 die Kontakteinbettung $f_2 \circ \varphi_a: (S^1 \times D_2, \xi_1) \hookrightarrow (M, \xi)$ betrachtet, kann man also a so wählen, dass $f_2(V) \subset \text{Int}(f_1(V))$. (Denn die Wahl der Kontakteinbettung $f_2 \circ \varphi_a$ statt f_2 führt zu einem Kontaktomorphismus der resultierenden Kontaktmannigfaltigkeiten.)

Es reicht also die folgende Situation zu betrachten:

- $(M, \xi) = (S^1 \times D_2, \xi_1)$,
- $K = \{(\theta, 0, 0)\} \subset (S^1 \times D_2, \xi_1)$
- $f_1 = \text{id}: (S^1 \times D_2, \xi_1) \hookrightarrow (S^1 \times D_2, \xi_1)$ ist die Identität und
- $f_2 =: f: (S^1 \times D_2, \xi_1) \hookrightarrow (S^1 \times D_2, \xi_1)$ bildet V in das Innere von V ab, also $f(V) \subset V$.

Bezeichne mit $(M'_{\text{id}}, \xi'_{\text{id}})$ und (M'_f, ξ'_f) die Kontaktmannigfaltigkeiten entstanden durch die obige Kontaktchirurgie bezüglich der Kontakteinbettungen id bzw. f . Dann gilt:

$$M'_{\text{id}} := \left(\underbrace{(S^1 \times D_2) \setminus V}_{\text{alte Kontaktstruktur}} + \underbrace{(S^1 \times D^2)}_{\text{eindeutige Kontaktstruktur}} \right) / \sim$$

Dabei ist die Kontaktstruktur auf $(S^1 \times D_2) \setminus V$ die alte und die Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ eindeutig (nach dem ersten Teil des Beweises). Für M'_f gilt:

$$M'_f := \left(\overline{(S^1 \times D_2) \setminus f(V)} + S^1 \times D^2 \right) / \sim$$

Da nun $f(V) \subset V$ gilt, kann man dies schreiben als:

$$M'_f := \left(\underbrace{\overline{(S^1 \times D_2) \setminus V}}_{\text{alte Kontaktstruktur}} + \underbrace{\overline{V \setminus f(V)} + S^1 \times D^2}_{\text{eindeutige Kontaktstruktur}} / \sim \right) / \sim$$

Auf dem ersten Summand ist die Kontaktstruktur die alte, also dieselbe wie bei M'_{id} . Der zweite Summand ist diffeomorph zu $S^1 \times D^2$, die Kontaktstruktur auf diesem Sum-

mand ist straff mit denselben Randdaten wie die Kontaktstruktur auf M'_{id} . Die Kontaktstrukturen müssen also nach dem Klassifikationssatz 3.20 isotop sein. Also sind die Mannigfaltigkeiten M'_{id} und M'_f kontaktomorph.

Insgesamt ist (M', ξ') (in diesem Fall) also unabhängig von f , g und der gewählten Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$. \square

Für diese komplett wohldefinierte $(\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie kann man nun noch einiges mehr zeigen.

Lemma 4.10 (Aufhebungslemma).

Wenn (M', ξ') durch $(\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie aus (M, ξ) entlang eines Legendre-Knotens K erhalten wurde, dann erhält man (M, ξ) aus (M', ξ') durch $(-\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie entlang des Legendre-Knotens $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times D^2 \subset (M', \xi')$ (der Seele des hereingeklebten Volltorus).

Beweis.

Zuerst zeigen wir, dass $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times D^2 \subset (M', \xi')$ wirklich ein Legendre-Knoten ist. Die Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ in $M' = (\overline{M \setminus f(V)} + S^1 \times D^2) / \sim$ ist bis auf Isotopie eindeutig. Eine Möglichkeit ist die Kontaktstruktur ξ_n . Dort ist die Seele ein Legendre-Knoten (nach Beispiel 2.9).

Nach dem vorigen Satz ist die Kontaktmannigfaltigkeit (M', ξ') unabhängig von der Wahl der Kontakteinbettung f . Wie im letzten Teil des vorigen Beweises kann man also ohne Einschränkungen annehmen, dass $(M, \xi) = (S^1 \times D_2, \xi_1)$ ist.

Weiter ist die resultierende Kontaktmannigfaltigkeit (M', ξ') unabhängig von g . Wir wählen g also möglichst einfach, nämlich so dass es auf Homologieebene wie folgt wirkt:

$$\begin{aligned} \mu_0 &\xrightarrow{g} \mu + n\lambda \\ \lambda_0 &\xrightarrow{g} \lambda \end{aligned}$$

Dann ist

$$M' = \left(\overline{(S^1 \times D_2) \setminus V} + S^1 \times D^2 \right) / \sim .$$

Dabei ist $\partial V = \partial(S^1 \times D^2)$ eine konvexe Fläche bezüglich der neuen Kontaktstruktur ξ' . Um eine $(-\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie an dieser neuen Mannigfaltigkeit auszuführen, kann man also denselben Volltorus $S^1 \times D^2$, den man in der ersten Chirurgie hereingeklebt hat, wieder ausschneiden, denn dieser Volltorus ist eine Tubenumgebung des Legendre-Knotens mit konvexem Rand. Dies macht man wieder mit einer möglichst einfachen

Anklebeabbildung, nämlich mit der Abbildung die wie folgt auf Homologieebene wirkt:

$$\begin{aligned} \mu_0 &\longmapsto \mu - n\lambda \\ \lambda_0 &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

Als resultierende Mannigfaltigkeit erhält man also:

$$M'' := \left(\overline{(S^1 \times D_2) \setminus V} + S^1 \times D^2 \right) / \sim.$$

Dabei werden die Ränder mit der Komposition der beiden Anklebeabbildungen identifiziert. Auf Homologieebene wirkt diese wie folgt:

$$\begin{aligned} \mu_0 &\xrightarrow{g} \mu + n\lambda \longmapsto \mu_0 \\ \lambda_0 &\xrightarrow{g} \lambda \longmapsto \lambda_0 \end{aligned}$$

Die Anklebeabbildung ist also isotop zur Identität. Die (eindeutige) Kontaktstruktur auf dem $S^1 \times D^2$ -Faktor ist also isotop zu ξ_1 . (Dazu betrachte auch die Skizze unten. Der S^1 -Faktor wurde jeweils nicht gezeichnet.) Also ist (M'', ξ'') kontaktomorph zu $(S^1 \times D_2, \xi_1)$.

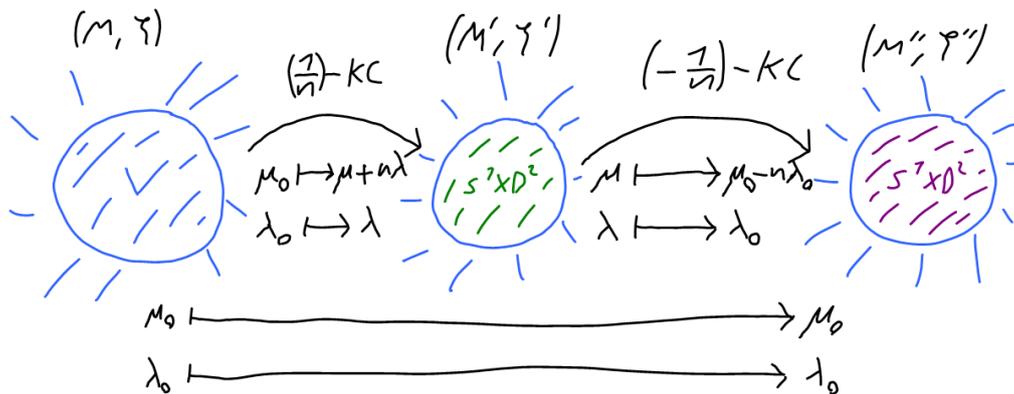


Abbildung 4.6: Aufhebungslemma

□

Lemma 4.11 (Ersetzungslemma).

Wenn (M', ξ') durch $(\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie ($n \neq 0$) aus (M, ξ) entlang des Legendre-Knotens K erhalten wurde, dann kann man (M', ξ') auch durch $|n|$ -fache ε -Kontaktchirurgie aus (M, ξ) erhalten, wobei $\varepsilon = \frac{n}{|n|} = \text{sign}(n) \in \{\pm 1\}$. Dabei wird jede ε -Kontaktchirurgie entlang der Seele des in der vorigen Chirurgie hineingeklebten Volltorus ausgeführt.

Beweis.

Der Beweis dieses Satzes geht mit den gleichen Methoden wie der vorige.

Wie oben können wir wieder annehmen, dass $(M, \xi) = (S^1 \times D_2, \xi_1)$ und dass der Legendre-Knoten K der Legendre-Standardknoten ist, also $K = S^1 \times \{0\}$. Weiter sind die Seelen der neu hereingeklebten Volltori immer Legendre-Knoten nach dem Beweis des vorigen Satzes.

(M', ξ') wird durch $(\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie entlang K aus $(S^1 \times D_2, \xi_1)$ erhalten. Als Kontakteinbettung f wählt man die Identität und als Anklebeabbildung g wählt man eine, die auf Homologieebene wie folgt wirkt:

$$\begin{aligned} \mu_0 &\xrightarrow{g} \mu + n\lambda \\ \lambda_0 &\xrightarrow{g} \lambda \end{aligned}$$

Mit diesen Wahlen (von denen das Resultat nach dem Eindeutigkeitsatz nicht abhängt) erhält man:

$$M' := \left(\underbrace{(S^1 \times D_2) \setminus V}_{\text{alte Kontaktstruktur}} + \underbrace{(S^1 \times D^2)}_{\text{eindeutige Kontaktstruktur}} \right) / \sim$$

Die Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ ist dabei eindeutig. Auf dem Rest bleibt die alte Kontaktstruktur erhalten.

Sei nun $n > 1$. (Für $n = 1$ ist die Aussage trivial.) Jetzt führen wir eine $(\frac{1}{n-1})$ -Kontaktchirurgie entlang K in $(S^1 \times D_2, \xi_1)$ aus. Dazu wählen wir für f die Identität und als Anklebeabbildung eine Abbildung mit:

$$\begin{aligned} \mu_0 &\longmapsto \mu + (n-1)\lambda \\ \lambda_0 &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

Die resultierende Mannigfaltigkeit ist dann:

$$\left(\underbrace{(S^1 \times D_2) \setminus V}_{\text{alte Kontaktstruktur}} + \underbrace{(S^1 \times D^2)}_{\text{eindeutige Kontaktstruktur}} \right) / \sim$$

Dabei ist die Kontaktstruktur auf $S^1 \times D^2$ wieder eindeutig. Wie im vorigen Beweis ist der Rand $\partial(S^1 \times D^2)$ wieder eine konvexe Fläche. Nun führen wir eine $(+1)$ -Kontaktchirurgie an dieser Mannigfaltigkeit entlang der Seele des hereingeklebten Volltorus aus, indem wir den hereingeklebten Volltorus wieder herausschneiden und einen neuen hereinkleben.

Dazu wählen wir eine Anklebeabbildung mit

$$\begin{aligned}\mu_0 &\longmapsto \mu + \lambda \\ \lambda_0 &\longmapsto \lambda\end{aligned}$$

und erhalten eine neue Mannigfaltigkeit

$$\left(\underbrace{(S^1 \times D_2) \setminus V}_{\text{alte Kontaktstruktur}} + \underbrace{(S^1 \times D^2)}_{\text{eindeutige Kontaktstruktur}} \right) / \sim.$$

Die Komposition der letzten beiden Anklebeabbildungen wirkt auf Homologieebene wie:

$$\begin{aligned}\mu_0 &\longmapsto \mu + (n-1)\lambda \longmapsto \mu + n\lambda \\ \lambda_0 &\longmapsto \lambda \longmapsto \lambda\end{aligned}$$

Diese Komposition der beiden Anklebeabbildung ist also isotop zu der Anklebeabbildung g , mit der wir die Kontaktmannigfaltigkeit (M', ξ') konstruiert haben. Da die Kontaktstrukturen auf den $(S^1 \times D^2)$ -Summanden eindeutig sind, sind beide Kontaktmannigfaltigkeiten kontaktomorph. Das allgemeine Ergebnis folgt dann per Induktion.

Im Fall $n < -1$ geht man analog vor, hier führt man zuerst eine $(\frac{1}{n+1})$ -Kontaktchirurgie und dann eine $(+1)$ -Kontaktchirurgie aus um eine $(\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie zu erhalten. \square

Satz 4.12 (Füllbarkeit durch Kontaktchirurgie).

Sei (M, ξ) eine geschlossene Kontaktmannigfaltigkeit und $n \in \mathbb{N}$.

(1) Wenn (M', ξ') aus (M, ξ) durch $(-\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie entlang eines Legendre-Knotens entstanden ist und (M, ξ) symplektisch füllbar ist, dann ist auch (M', ξ') symplektisch füllbar.

(2) Wenn (M', ξ') aus (M, ξ) durch $(\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie entlang eines Legendre-Knotens entstanden ist und (M, ξ) **nicht** symplektisch füllbar ist, dann ist auch (M', ξ') **nicht** symplektisch füllbar.

Beweis.

Bezeichne mit M' die dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die aus einer geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M durch (topologische) **ganzzahlige** Dehn-Chirurgie entlang eines Knotens entstanden ist. Ganzzahlige Dehn-Chirurgie ist eine Chirurgie mit ganzzahligem Chirurgiekoeffizienten. (Man kann leicht zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der Rahmung abhängt.) Eine solche ganzzahlige Dehn-Chirurgie lässt sich auch etwas anders auffassen: Man betrachte die vierdimensionale Mannigfalt-

tigkeit $M \times [0, 1]$. Die Mannigfaltigkeit M' kann man nun auch erhalten, indem man an den Rand $M \times \{1\}$ einen 2-Henkel anheftet (das heißt Ankleben von $D^2 \times D^2$ entlang eines D^2 -Faktors). Der obere Rand dieser vierdimensionalen Mannigfaltigkeit ist dann nach Glättung des Winkels wieder eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Wenn man den 2-Henkel auf die richtige Art und Weise anklebt, entspricht diese neue dreidimensionale Mannigfaltigkeit genau M' (dafür siehe [13, 9.G.4 und 9.G.5]). Ganzzahlige Dehn-Chirurgie liefert also immer einen (topologischen) Kobordismus von M nach M' . (In der Abbildung unten ist dies anders als in den Abbildungen zuvor eine Dimension niedriger schematisch dargestellt.)

Betrachtet man nun eine allgemeine (topologische) Dehn-Chirurgie, also nicht unbedingt mit ganzzahligem Chirurgiekoeffizienten, so kann man diese Dehn-Chirurgie in (mehrere) ganzzahlige Chirurgien an eventuell anderen Knoten umwandeln (dafür siehe zum Beispiel [3]). Allgemeine Dehn-Chirurgie liefert also auch immer einen (topologischen) Kobordismus von M nach M' , dabei muss man dann aber im Allgemeinen mehrere 2-Henkel anheften.

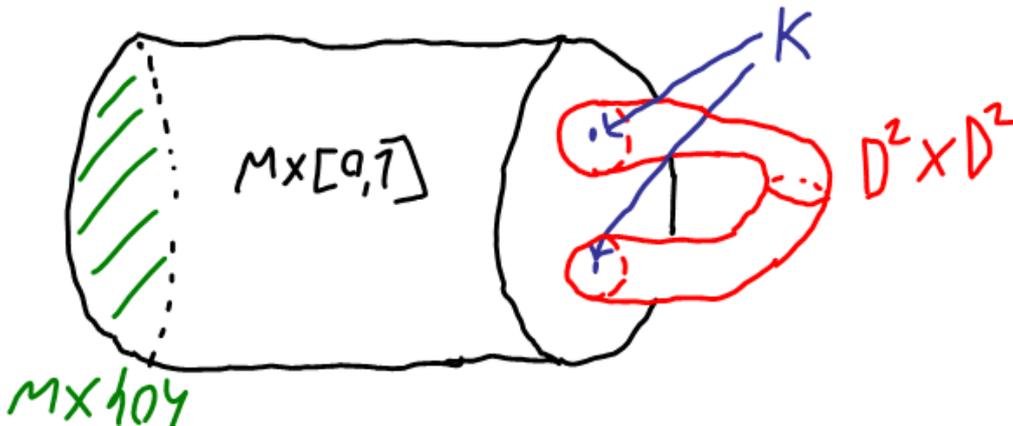


Abbildung 4.7: Ein Kobordismus, der einer Chirurgie entspricht.

Auch haben wir in Beispiel 2.18 (2) gesehen, dass man $M \times [0, 1]$ mit einer symplektischen Struktur, der Symplektifizierung von (M, ξ) , versehen kann, falls M eine Kontaktstruktur ξ trägt. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass man im Falle einer (-1) -Kontaktchirurgie sogar den obigen 2-Henkel mit einer symplektischen Struktur versehen kann, die nach Glättung des Winkels bei $M \times \{1\}$ mit der symplektischen Struktur der Symplektifizierung übereinstimmt. Dies würde dann einen symplektischen Kobordismus von (M, ξ) nach (M', ξ') liefern.

Betrachte dazu den \mathbb{R}^4 mit kartesischen Koordinaten (x, y, z, t) und symplektischer Stan-

Standardform $\omega_{st} = dx \wedge dy + dz \wedge dt$ wie in Beispiel 2.18 (1). Das Vektorfeld

$$Y(x, y, z, t) := 2x \partial_x - y \partial_y + 2z \partial_z - t \partial_t$$

ist ein Liouville-Vektorfeld, denn

$$\mathfrak{L}_Y \omega_{st} = d(\iota_Y(dx \wedge dy + dz \wedge dt)) = d(2x dy) + d(y dx) + d(2t dz) + d(z dt) = \omega_{st}.$$

Die Hyperfläche $M_0 := \{y^2 + t^2 = 1\}$ ist transversal zu dem Liouville-Vektorfeld Y (siehe dazu auch Abbildung 4.8). Also induziert Y (nach Satz 2.20) eine Kontaktform α_0 auf M_0 durch

$$\alpha_0 := \iota_Y \omega_{st} = 2x dy + y dx + 2z dz + t dt.$$

Der Knoten $K_0 = \{x = z = 0; y^2 + t^2 = 1\} \subset M_0$ ist ein Legendre-Knoten in M_0 bezüglich der Kontaktstruktur $\xi_0 := \ker \alpha_0$. Um dies zu sehen, parametrisiert man diesen Knoten durch

$$S^1 \ni \theta \longmapsto (0, \cos \theta, 0, \sin \theta) \in (\mathbb{R}^4, \omega_{st}).$$

Dann gilt

$$\alpha_0(K'_0(\theta)) = (\cos \theta dy + \sin \theta dt)(-\sin \theta \partial_y + \cos \theta \partial_t) = 0.$$

Also ist K_0 wirklich ein Legendre-Knoten, der dann auch sofort durch das Vektorfeld $y \partial_t - t \partial_y$ orientiert ist (siehe Abbildung 4.9).

Nun kann man einen 2-Henkel an eine beliebig kleine Tubenumgebung von K_0 in M_0 , wie in der Abbildung auf der nächsten Seite gezeigt, anheften. Die neu entstandene Hyperfläche M'_0 (in rot) trägt wieder eine Kontaktstruktur ξ'_0 (die außerhalb des neuen 2-Henkels (grau) der alten entspricht), da diese Hyperfläche wieder transversal zu Y ist. Man bemerke auch, dass dieser vierdimensionale 2-Henkel (in der Abbildung unten grau) so gewählt wurde, dass die neue Mannigfaltigkeit M' schon glatt ist. Insbesondere ist also keine Glättung des Winkels mehr nötig.

Wir wollen nun zeigen, dass diese Chirurgie einer (-1) -Kontaktchirurgie entlang des Knotens K_0 entspricht, also dass M'_0 aus M_0 durch (-1) -Kontaktchirurgie entlang K_0 entsteht.

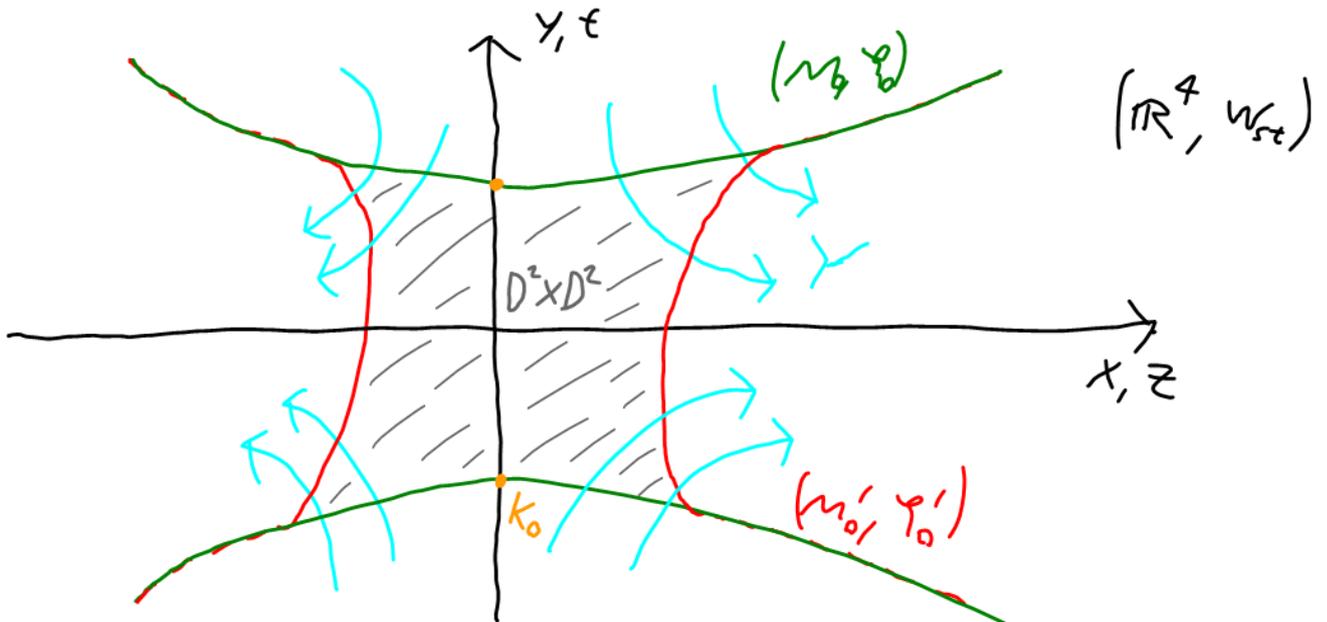


Abbildung 4.8: lokales Modell einer (-1)-Kontaktchirurgie

Dazu berechnen wir die Kontaktrahmung und die Rahmung der Chirurgie, die der obigen Konstruktion entspricht. Zuerst berechnen wir die Rahmung der Chirurgie.

M_0 ist orientiert durch die Volumenform $\alpha_0 \wedge d\alpha_0$. Da nun K_0 durch $y \partial_t - t \partial_y$ orientiert ist, ist das Normalenbündel von K_0 in M_0 orientiert durch $\iota_{(y \partial_t - t \partial_y)}(\alpha_0 \wedge d\alpha_0)|_{K_0}$. Diese Volumenform wird nun berechnet:

$$d\alpha_0 = dx \wedge dy + dz \wedge dt = \omega_{st}$$

$$\alpha_0 \wedge d\alpha_0 = 2z dt \wedge dx \wedge dy + t dz \wedge dx \wedge dy + 2x dy \wedge dz \wedge dt + y dx \wedge dz \wedge dt$$

$$(\alpha_0 \wedge d\alpha_0)|_{K_0} = t dz \wedge dx \wedge dy + y dx \wedge dz \wedge dt$$

Damit gilt dann:

$$\iota_{(y \partial_t - t \partial_y)}(\alpha_0 \wedge d\alpha_0)|_{K_0} = (y^2 + t^2) dx \wedge dz = dx \wedge dz$$

Die orientierte Rahmung dieser Chirurgie ist also gegeben durch $\{\partial_x, \partial_z\}$. (Hier denkt man von einer Rahmung als eine globale Basis aus Vektorfeldern für die Tangentialräume.)

Die Kontaktrahmung ist gegeben durch ein Vektorfeld R , das transversal zu K_0 , aber tangential an ξ_0 ist. Als Ansatz wählen wir $R(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) \partial_x + b(x, y, z, t) \partial_z$,

denn dieses Vektorfeld ist in jedem Fall transversal zu K_0 . Weiter ist R tangential zu ξ_0 , wenn

$$0 = \alpha_0(R) = a(x, y, z, t) y + b(x, y, z, t) t$$

gilt. Eine Möglichkeit für R wäre also

$$R(x, y, z, t) = t \partial_x - y \partial_z.$$

Wenn man nun einmal entlang K_0 in Richtung des Vektorfeldes $y \partial_t - t \partial_y$ entlangläuft, macht R genau eine positive Drehung (das heißt gegen den Uhrzeigersinn) bezüglich der Basis $\{\partial_x, \partial_z\}$ (siehe Abbildung unten). Also macht die Rahmung der Chirurgie eine negative Drehung bezüglich der Kontaktrahmung gemessen. Diese Konstruktion entspricht also einer (-1) -Kontaktchirurgie. (Bemerke, dass diese Zahl unabhängig von der gewählten Orientierung von K_0 ist.)

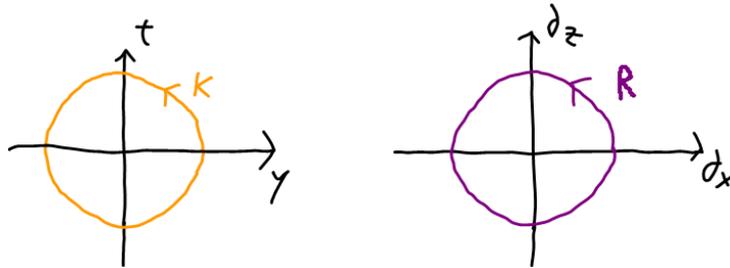


Abbildung 4.9: Vergleich der Rahmungen

Aus diesem lokalen Modell folgt der allgemeine Teil nun recht leicht. Ein beliebiger Legendre-Knoten K in einer geschlossenen Kontaktmannigfaltigkeit $(M, \xi = \ker \alpha)$ ist nach dem Umgebungssatz für Legendre-Knoten kontaktomorph zu einer Umgebung des Knotens K_0 in M_0 wie im obigen Modell. Betrachtet man nun die Symplektifizierung $(M \times [0, 1], d(e^t \alpha))$ von (M, ξ) wie in Beispiel 2.18 (2), dann ist das Vektorfeld ∂_t ein Liouville Vektorfeld transversal zu M . Da das Liouville Vektorfeld Y in $(\mathbb{R}^4, \omega_{st})$ auch transversal zu M_0 ist, kann man den symplektischen 2-Henkel symplektisch an die symplektische Mannigfaltigkeit $(M \times [0, 1], d(e^t \alpha))$ ähnlich wie im Beweis von Satz 2.25 ankleben. Die neu entstandene symplektische Mannigfaltigkeit ist also ein symplektischer Kobordismus von (M, ξ) zur neu entstandenen Kontaktmannigfaltigkeit (M', ξ') . (Diese Konstruktion geht auf [14] zurück, siehe auch [2, Seiten 587-588].)

Der Rest des Beweises ist nun einfach. Sei also (M, ξ) eine geschlossene Kontaktmannigfaltigkeit, die symplektisch füllbar ist. Wenn (M', ξ') aus (M, ξ) durch $(-\frac{1}{n})$ -Kon-

taktchirurgie entlang eines Legendre-Knotens entstanden ist, dann entsteht (M', ξ') aus (M, ξ) nach dem Ersetzungslemma auch durch $|n|$ -fache (-1) -Kontaktchirurgie. Jede dieser (-1) -Kontaktchirurgien liefert nach der vorigen Beobachtung einen symplektischen Kobordismus von der vorigen Kontaktmannigfaltigkeit zu der neu entstandenen. Klebt man nun alle diese symplektischen Kobordismen (wie im Beweis von Satz 2.25) in der entsprechenden Reihenfolge an die symplektische Füllung von (M, ξ) erhält man eine symplektische Füllung von (M', ξ') (siehe Abbildung unten, wieder wie früher um zwei Dimensionen reduziert). Daraus folgt Aussage (1).

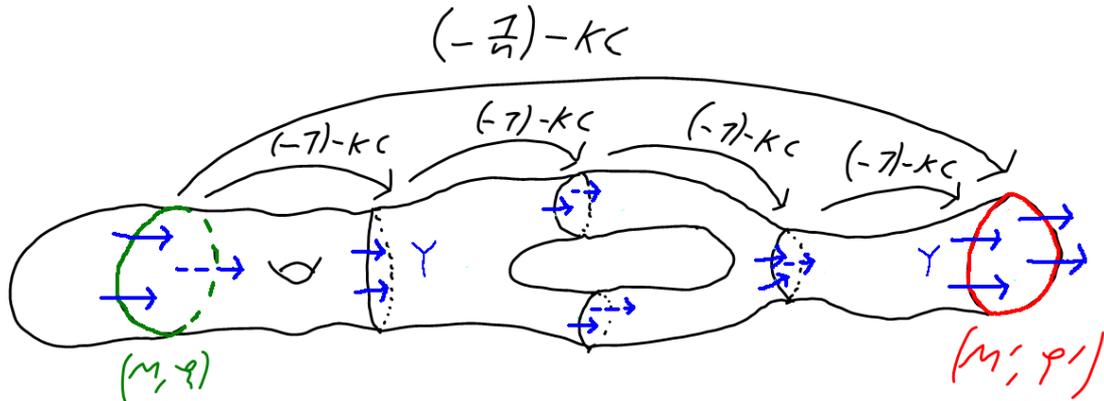


Abbildung 4.10: Symplektische Füllung von (M', ξ')

Wegen des Aufhebungslemmas erhält man dann auch sofort Aussage (2). Insbesondere folgt auch, dass eine $(+1)$ -Kontaktchirurgie einen symplektischen Kobordismus von (M', ξ') nach (M, ξ) liefert. \square

Bemerkung 4.13

Nur die (± 1) -Kontaktchirurgien entsprechen symplektischen Henkelkörperkonstruktionen und liefern so eine symplektische vierdimensionale Mannigfaltigkeit. Dies entspricht der Tatsache, dass nicht jede vierdimensionale Mannigfaltigkeit eine symplektische Struktur trägt, eine notwendige Bedingung dafür ist, dass alle geraden Homologiegruppen nicht verschwinden, so trägt zum Beispiel S^4 keine symplektische Struktur (siehe [9, Seite 12]).

5 Ausblick und Anwendungen

Die Kontaktchirurgie findet einige schöne Anwendungen. Zu allererst kann man natürlich aus gegebenen Kontaktmannigfaltigkeiten neue konstruieren. Bei einer $(\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie ist diese neue Kontaktmannigfaltigkeit sogar bis auf Kontaktomorphismen eindeutig bestimmt. Andererseits kann man aber, wie der letzte Satz zeigt, mit einer $(\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie auch symplektische Mannigfaltigkeiten mit Rändern erzeugen. In einigen Fällen kann man dann noch an die Ränder andere symplektische Mannigfaltigkeiten ankleben und so auch symplektische Mannigfaltigkeiten ohne Ränder erhalten. Auf diese Weise kann man auch zeigen, dass bestimmte Kontaktmannigfaltigkeiten symplektisch füllbar oder eben nicht symplektisch füllbar sind. Dazu einige einfache Beispiele:

Eine Chirurgie an einem linkshändigen Kleeblattknoten in $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ mit Chirurgiekoeffizient -1 bezüglich der Flächenrahmung liefert die Poincaré-Homologiesphäre P (siehe [13, Beispiel 9.G.2]). (Eine Homologiesphäre ist eine Mannigfaltigkeit mit denselben Homologiegruppen wie die Sphäre.)

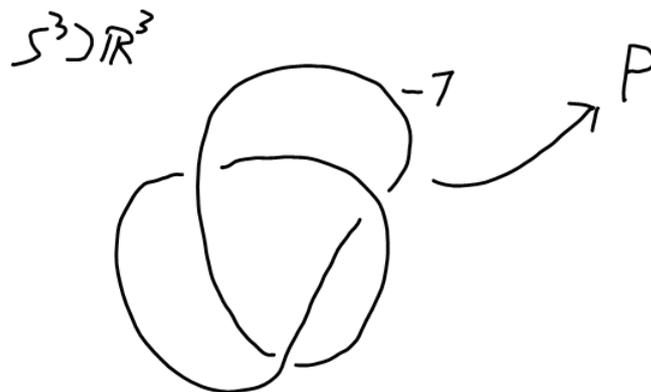


Abbildung 5.1: Ein Chirurgiediagramm der Poincaré-Homologiesphäre P

Weiter liefert eine Chirurgie an dem linkshändigen Kleeblattknoten in S^3 mit Chirurgiekoeffizient $+1$ bezüglich der Flächenrahmung eine andere Homologiesphäre, die hier mit H bezeichnet wird. Man kann zeigen, dass diese Chirurgie (topologisch) äquivalent ist

(das heißt sie liefern diffeomorphe Mannigfaltigkeiten) zu einer Chirurgie am rechtshändigen Kleeblattknoten mit Chiruriekoeffizient -1 bezüglich der Flächenrahmung (auch dafür siehe [13, Beispiel 9.H.6]).

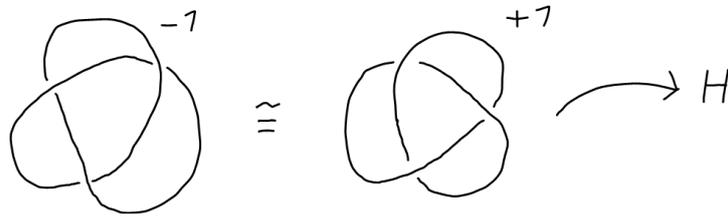


Abbildung 5.2: Zwei Chirurgiediagramme der Homologiesphäre H

Nun wollen wir die (-1) -Chirurgie am rechtshändigen Kleeblattknoten als eine $(\frac{1}{n})$ -Kontaktchirurgie ausführen, um eine eindeutig bestimmte Kontaktstruktur auf der Homologiesphäre H zu erhalten. Dazu versehen wir S^3 mit seiner Standardkontaktstruktur ξ_{st} (siehe Beispiel 2.21 (1)). Eingeschränkt auf $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$ liefert dies die Standardkontaktstruktur $\xi_{st} = x dy + dz$ auf dem \mathbb{R}^3 (siehe Beispiel 2.21 (1)). Einen Legendre-Kleeblattknoten in (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) kann man zum Beispiel wie im Bild unten in seiner Front-Projektion (siehe Beweis von Satz 2.11) zeichnen. (Warum dieses Zick-Zack unten rechts eingeführt wurde wird später deutlich.)

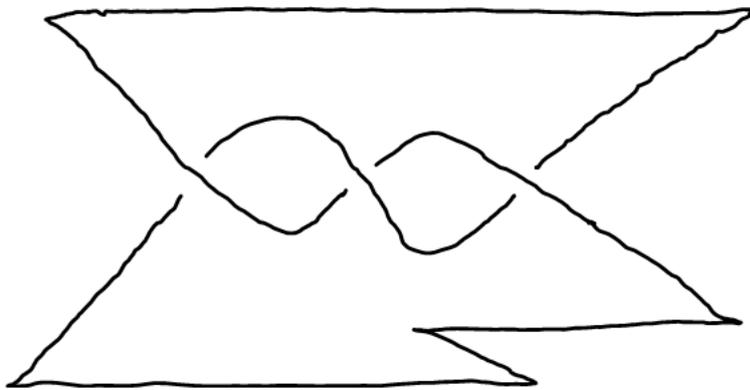


Abbildung 5.3: Ein rechtshändiger Legendre-Kleeblattknoten, der eine eindeutige Kontaktstruktur auf der Homologiesphäre H liefert.

Nun brauchen wir eine Möglichkeit die Flächenrahmung mit der Kontaktrahmung zu vergleichen um den Chiruriekoeffizienten in die Kontaktrahmung umzurechnen. Natürlich könnten wir auch einfach den Approximationssatz durch Legendre-Knoten be-

nutzen und den Kleeblattknoten zu einem Legendre-Kleeblattknoten in (S^3, ξ_{st}) approximieren und dann die Kontaktchirurgie entlang dieses Legendre-Knotens ausführen, die der Flächenrahmung -1 entspricht. Dies würde auch eine Kontaktstruktur auf H liefern, aber dann weiß man nicht, ob diese Kontaktstruktur eindeutig ist und erhält keine Aussagen über die Füllbarkeit. Weiter sollte man auch beachten, dass es Legendre-Knoten gibt, die topologisch isotop sind, aber nicht Legendre-isotop, und so nach Kontaktchirurgie zu derselben Mannigfaltigkeit mit unterschiedlichen Kontaktstrukturen führen können. Weiter unten wird ein solcher Knoten explizit angegeben.

Um die Flächenrahmung mit der Kontaktrahmung zu vergleichen, führt man nun also eine Invariante für Legendre-Knoten ein, die genau dies macht:

Definition 5.1 (Thurston-Bennequin-Invariante).

*Sei K ein homologisch trivialer Legendre-Knoten in einer Kontaktmannigfaltigkeit (M, ξ) . Die **Thurston-Bennequin-Invariante** $tb(K)$ von K ist definiert durch die Forderung $tb(K) := lk(K, \lambda)$, wobei λ einen zu K parallelen Knoten bezüglich der Kontaktrahmung bezeichnet. (Dabei sollen K und λ gleich orientiert sein.)*

Bemerkung 5.2

(1) Dies ist **keine** (topologische) Isotopieinvariante. Denn, wenn man K isotopiert, ändert sich die Longitude λ , welche zur Kontaktrahmung gehört. Weiter unten sehen wir dies noch explizit. Man kann aber zeigen, dass tb eine Invariante unter Legendre-Isotopien ist (das heißt Isotopien, die immer Legendre-Einbettungen sind) (zum Beispiel indem man die Invarianz unter den Reidemeisterbewegungen im Legendre-Fall zeigt).

(2) Da eine Longitude $\lambda_{\text{Flächenrahmung}}$, zugehörig zur Flächenrahmung des Knoten, Verschlingungszahl null mit dem Knoten hat, gilt $tb(K) := lk(\lambda_{\text{Flächenrahmung}}, \lambda_{\text{Kontaktrahmung}})$. Die Thurston-Bennequin-Invariante gibt also genau die Anzahl der Drehung der Kontaktrahmung um die Flächenrahmung an (wobei rechtshändige Drehungen positiv gezählt werden).

Um jetzt die Thurston-Bennequin-Invariante des rechtshändigen Legendre-Kleeblattknotens aus Abbildung 5.3 zu berechnen, bemerkt man, dass das Vektorfeld ∂_z immer transversal zur Standardkontaktstruktur ξ_{st} steht. Man kann also nach Bemerkung 4.3 (4) eine zur Kontaktrahmung zugehörige Longitude erhalten, indem man den Knoten in Richtung dieses Vektorfeldes verschiebt. Die Thurston-Bennequin-Invariante erhält man dann durch abzählen der Kreuzungspunkte wie bei der Verschlingungszahl gefordert (siehe [12, Kapitel 6.15]). Im Bild unten ist dies ausgeführt (der ursprüngliche Knoten K ist in schwarz gezeichnet, die Longitude in rot):

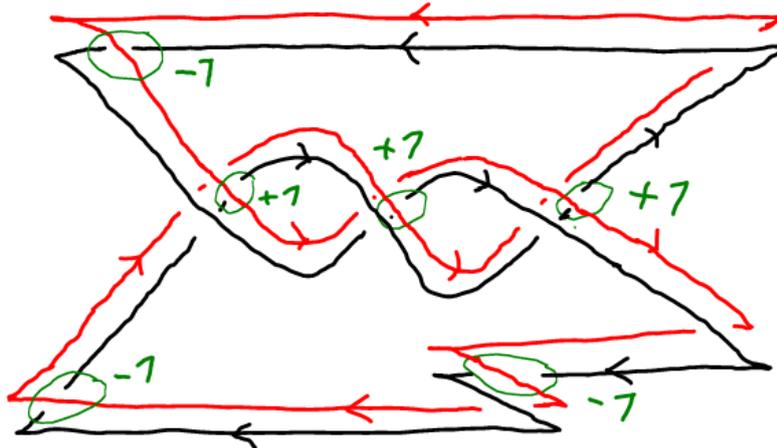


Abbildung 5.4: Berechnung der Thurston-Bennequin Invariante

In diesem Fall erhält man also $tb(K) = lk(K, \lambda) = 0$.

Dieses Verfahren funktioniert für alle Front-Projektionen von Legendre-Knoten in (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) .

Somit erhält man folgendes Korollar:

Korollar 5.3 (Berechnung von tb).

Sei K ein Legendre-Knoten in (\mathbb{R}^3, ξ_{st}) und K_F seine Front-Projektion. Dann gilt:

$$tb(K) = \text{Windung}(K_F) - \frac{1}{2} \#(\text{Spitzen}(K_F))$$

In dem oben betrachteten Fall ist $tb(K) = 0$. Also ist die Flächenrahmung gleich der Kontaktrahmung und somit führt eine (-1) -Kontaktchirurgie entlang dieses rechtshändigen Legendre-Kleeblattknotens zu einer eindeutigen Kontaktstruktur ξ' auf der Homologie-sphäre H . Da (S^3, ξ_{st}) nach Beispiel 2.24 symplektisch füllbar ist, ist nach Satz 4.12 auch (H, ξ') symplektisch füllbar. Dies gibt einen symplektische Kobordismus von der leeren Menge zu (H, ξ') also eine symplektische Mannigfaltigkeit mit Rand H (siehe Abbildung unten).

Weiter gibt es nach Satz 2.27 einen symplektischen Kobordismus von einer beliebigen Kontaktmannigfaltigkeit zu der leeren Menge. Wenn man diese symplektische Mannigfaltigkeit an die vorige anklebt, erhält man sogar eine symplektische Mannigfaltigkeit ohne Rand. (Der Kobordismus von (H, ξ') zur leeren Menge ist in der Skizze unten gestrichelt angedeutet.)

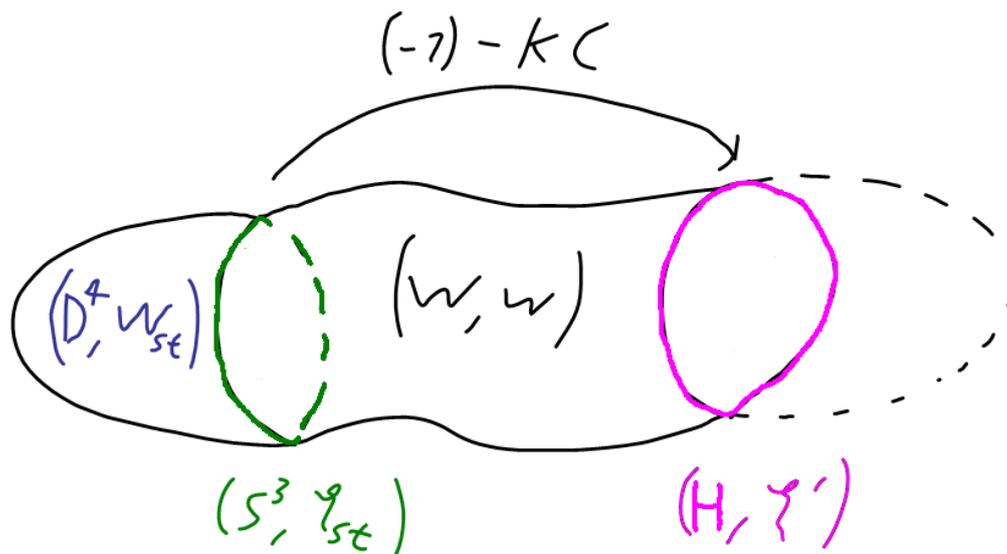


Abbildung 5.5: Füllung der Homologiesphäre H

Der rechtshändige Legendre-Kleeblattknoten in Abbildung 5.3 wäre allerdings nicht die natürliche Wahl. Zunächst würde man folgenden Legendre-Kleeblattknoten betrachten:

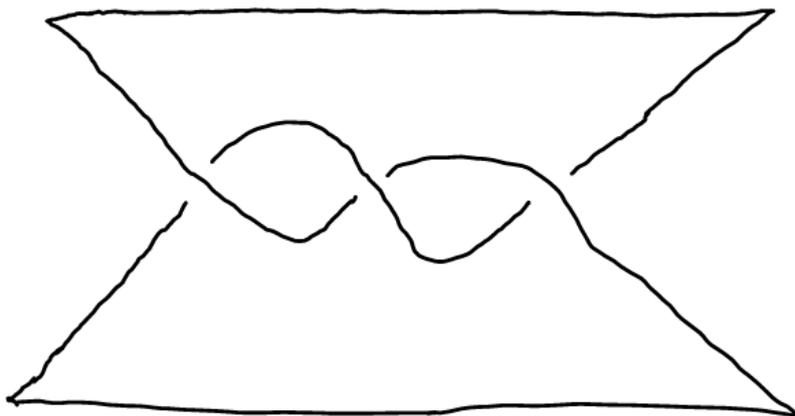


Abbildung 5.6: Ein anderes rechtshändiges Legendre-Kleeblatt

Dieses Legendre-Kleeblatt hat aber (nach Korollar 5.3) $tb(K) = 1$ und somit müsste man eine $(+2)$ -Kontaktchirurgie ausführen um die Homologiesphäre H zu erhalten. In diesem Fall kann man aber nichts über die entstandene Kontaktstruktur aussagen. So sieht man auch, dass man durch Einfügen solcher Zick-Zacks die Thurston-Bennequin-Invariante eines Legendre-Knotens beliebig verkleinern kann. Dies nennt man auch **Stabilisierung**. Durch Stabilisierung kann man also auch immer Rahmung null vermeiden

und so einen alternativen Beweis für den Satz von Martinet (siehe Korollar 4.7) angeben, bei dem nur straffe Kontaktstrukturen auf den neuhereingeklebten Volltori benutzt werden (siehe auch [11, Korollar 11.2.3]).

In überdrehten Kontaktmannigfaltigkeiten, kann man die Rahmung auch beliebig vergrößern, in straffen dagegen liegt für jeden (topologischen) Knoten eine obere Schranke vor (dafür siehe [7, Seite 318 und Satz 4.6.36]).

Mit dieser Methode kann man natürlich auch eine Kontaktstruktur auf der Poincaré-Homologiesphäre P erhalten. Dazu betrachtet man folgenden linkshändigen Legendre-Kleblattknoten:

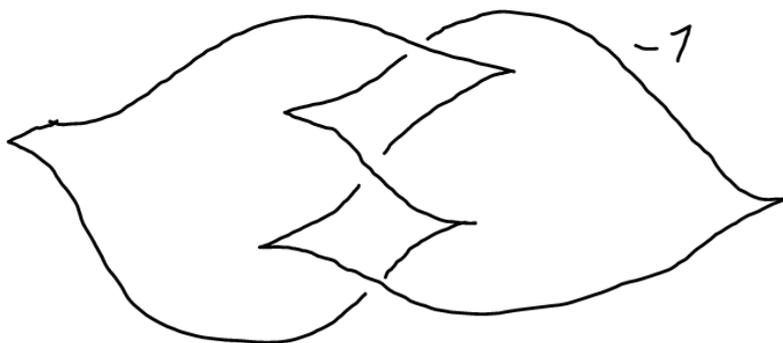


Abbildung 5.7: Ein linkshändiges Legendre-Kleblatt

Dieser hat nach dem Korollar oben $tb(K) = -6$. Also erhält man keine genaueren Aussagen über die neu entstandene Kontaktstruktur. Allerdings könnte man auch hier wieder versuchen, eine äquivalente Chirurgiebeschreibung der Poincaré-Homologiesphäre mittels einer Verschlingung zu erhalten, in der alle Chirurgiekoeffizienten umgerechnet in die Kontaktrahmung einer $\frac{1}{n}$ -Kontaktchirurgie entsprechen.

Die Ergebnisse aus Kapitel 4 lassen sich natürlich auf ähnliche Weise wie oben vorgestellt auf kompliziertere Probleme anwenden. Dazu einige Beispiele:

Die Ergebnisse aus Kapitel 4 sind alle schon in der Einleitung von [1] vorhanden. Im Rest dieses Papers wird dann mit diesen Methoden gezeigt, dass einige Kontaktstrukturen auf Torusbündeln symplektisch füllbar oder nicht symplektisch füllbar sind.

Im Folgepaper [2] wird gezeigt, dass sich jede Kontaktchirurgie in eine Sequenz von (± 1) -Kontaktchirurgien übersetzen lässt. Damit und mit dem Satz von Dehn-Lickorish wird dann gezeigt, dass jede Kontaktmannigfaltigkeit durch (± 1) -Kontaktchirurgie aus (S^3, ξ_{st}) erhalten werden kann (für einen einfacheren Beweis siehe auch [7, Satz 6.4.4]).

In [7, Kapitel 6.5] wird damit dann noch Einiges mehr bewiesen zum Beispiel Satz 2.26. Mit diesen Methoden folgt auch ein Beweis des Theorems von Lutz-Martinet, welches besagt, dass jedes koorientierte Ebenenfeld auf einer orientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit homotop zu einer Kontaktstruktur ist (für diesen Beweis siehe [4]).

Weiter oben haben wir gesehen, dass topologisch äquivalente Knoten trotzdem verschiedene Kontaktmannigfaltigkeiten liefern können. Nun stellt sich natürlich die Frage, welche (topologisch) äquivalenten Chirurgiediagramme auch dieselben Kontaktmannigfaltigkeiten liefern. Diese Frage wird in [3] beantwortet. Dort werden Henkelbewegungen in Kirby-Diagrammen (siehe [8]) in den Kontakt-Fall übersetzt. Mit diesen Resultaten kann man dann besser mit Kontakt-Chirurgiediagrammen arbeiten.

Für weitere Anwendungen der Kontakt-Dehn-Chirurgie siehe auch [11].

Literaturverzeichnis

- [1] F. DING AND H. GEIGES, Symplectic fillability of tight contact structures on torus bundles, *Alg. and Geom. Topol.* **1** (2001), 153-172.
- [2] F. DING AND H. GEIGES, A Legendrian surgery presentation of contact 3-manifolds, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **136** (2004), 583-598.
- [3] F. DING AND H. GEIGES, Handle moves in contact surgery diagrams, *J. Topol.* **2** (2009), 105-122.
- [4] F. DING, H. GEIGES AND A. I. STIPSICZ, Surgery diagrams for contact 3-manifolds, *Turkish J. Math.* **28** (2004), 41-74.
- [5] YA. ELIASHBERG, Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work, *Ann. Inst. Fourier* **42** (1992), 165-192.
- [6] D. GAY, Explicit concave fillings of contact three-manifolds, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **133** (2002), 431-441
- [7] H. GEIGES, *An Introduction to Contact Topology*, Cambridge Stud. Adv. Math. **109** (Cambridge University Press, 2008).
- [8] R. E. GOMPF AND A. I. STIPSICZ, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Grad. Stud. Math. **20** (American Mathematical Society, Providence, RI, 1999).
- [9] H. HOFER AND E. ZEHNDER, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher (Birkhäuser, 1994).
- [10] K. HONDA, On the classification of tight contact structures I, *Geom. Topol.* **4** (2000), 309-368.
- [11] B. OZBAGCI AND A. I. STIPSICZ, *Surgery on Contact 3-Manifolds and Stein Surfaces*, Bolyai Soc. Math. Stud. **13**, Springer-Verlag, Berlin (2004).

- [12] V. V. PRASOLOV AND A. B. SOSSINSKY, *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*, Transl. math. Monogr. **154**, American Mathematical Society, Providence (1997)
- [13] D. ROLFSEN, *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series **7**, Publish or Perish, Berkeley (1976).
- [14] A. WEINSTEIN, Contact surgery and symplectic handlebodies, *Hokkaido Math. J.* **20** (1991), 241-251.