Algebra und Funktionentheorie — Übungsblatt 0

HU Berlin, Prof. Dr. T. Krämer — keine Abgabe

Dieses Blatt dient zur Wiederholung. Die Aufgaben sind *nicht* schriftlich abzugeben, sie können aber in den optionalen Übungsgruppen der ersten Vorlesungswoche diskutiert werden.

Aufgabe 0.1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei

$$x * y \ := \ xy - x - y + 2.$$

Zeigen Sie, dass ein $a \in \mathbb{R}$ so existiert, sodass $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 0.2.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$G \ := \ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \ \middle| \ a, b \in \mathbb{R}, \ b \neq 0 \right\}$$

bezüglich der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe bildet.

(b) Geben Sie eine Gruppe H an, sodass die Abbildung

$$\varphi : \quad G \longrightarrow H, \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mapsto b$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Geben Sie den Kern und das Bild von φ an.

Aufgabe 0.3. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, wobei die Menge $G = \{a, b, c, x, y, z\}$ aus genau sechs Elementen bestehe. Finden Sie die fehlenden Einträge in der folgenden Verknüpfungstafel:

$\cdot$	a	b	c	x	y	z
a					c	b
b		x	z			
c		y				
x				x		
y						
z		a			x	

Bitte geben Sie Ihre Lösungen wie auf moodle beschrieben ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 1.1 (10 Punkte).

(a) Sei G, H Gruppen und $g \in G$ ein Element der Ordnung $\operatorname{ord}(g) < \infty$. Zeigen Sie, dass für jeden Homomorphismus
$$f : \quad G \longrightarrow H$$
die Ordnung $\operatorname{ord}(f(g))$ ein Teiler der Ordnung $\operatorname{ord}(g)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass keine der folgenden Gruppen zueinander isomorph sind:

(1) Die Gruppe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

(2) Die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

(3) Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_4 = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$.

(4) Die Diedergruppe D_6 der Symmetrien eines regelmässigen Sechsecks.

(c) Bestimmen Sie die Gruppen $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ und $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\times)$.

Aufgabe 1.2 (10 Punkte).

(a) Sei G eine Gruppe. Unter dem *Produkt* von zwei Teilmengen $G_1, G_2 \subseteq G$ verstehen wir die Teilmenge
$$G_1 \cdot G_2 \;:=\; \{g_1 g_2 \in G \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}.$$
Beantworten Sie folgende Fragen mit einem Beweis oder Gegenbeispiel:

(1) Ist das Produkt von zwei Normalteilern in G stets wieder ein Normalteiler in G?

(2) Ist das Produkt von zwei Untergruppen in G stets wieder eine Untergruppe in G?

(b) Zeigen Sie, dass eine Untergruppe $N \leq G$ genau dann ein Normalteiler ist, wenn es für alle $a, b \in G$ ein $c \in G$ gibt mit
$$aN \cdot bN \;=\; cN.$$

Aufgabe 1.3 (10 Punkte). Sei
$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, d \in \mathbb{Z}, \det(M) = \pm 1 \right\} \quad \text{und} \quad N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass G bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler in G ist.

(c) Finden Sie einen Isomorphismus $G/N \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für geeignete $m, n \in \mathbb{N}$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 2.1 (10 Punkte).

(a) Gibt es eine Gruppe, die die Vereinigung von zwei echten Untergruppen ist?

(b) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass

$$\mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) \;:=\; \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \text{ für eine Potenz } n = p^k \text{ mit } k \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Gruppe bezüglich der Multiplikation bildet, und finden Sie alle ihre Untergruppen.

Aufgabe 2.2 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Abb}(X, G) := \{f : X \to G\}$ ist eine Gruppe bezüglich der punktweisen Multiplikation.

(b) Für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ist

$$N_Y \;:=\; \{f \in \mathrm{Abb}(X, G) \mid \forall y \in Y : f(y) = e_G\}$$

ein Normalteiler in $\mathrm{Abb}(X, G)$, und für den Quotienten gilt $\mathrm{Abb}(X, G)/N_Y \simeq \mathrm{Abb}(Y, G)$.

Aufgabe 2.3 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Das Zentrum $Z(G) := \{z \in G \mid \forall g \in G : gz = zg\}$ ist ein Normalteiler in G.

(b) Bestimmen Sie $Z(G)$ für

- die Diedergruppe $G = D_n$ für $n \geq 3$,
- die Gruppe $G = \mathrm{GL}_n(K)$ über einem Körper K.

Aufgabe 2.4 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie: Für alle $g \in G$ ist $c_g : G \longrightarrow G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ ein Automorphismus.

(b) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto c_g$ ist ein Homomorphismus.

(c) Die Automorphismen in (a) heißen *innere Automorphismen.* Zeigen Sie, dass die Menge der inneren Automorphismen einen Normalteiler in der Automorphismengruppe von G bildet:

$$\mathrm{Inn}(G) \;:=\; \left\{ c_g \in \mathrm{Aut}(G) \mid g \in G \right\} \;\trianglelefteq\; \mathrm{Aut}(G)$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 3.1 (10 Punkte).

(a) Aus wievielen Elementen besteht die Untergruppe $G \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, die erzeugt wird von den zwei Matrizen

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}?$$

(b) Bestimmen Sie alle Normalteiler $N \trianglelefteq G$, und geben Sie jeweils den Quotienten G/N an.

Aufgabe 3.2 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt *charakteristisch*, wenn

$$\varphi(H) = H \quad \text{für alle } \varphi \in \mathrm{Aut}(G)$$

ist. Zeigen Sie:

(a) Charakteristische Untergruppen sind Normalteiler.

(b) Ist H eine charakteristische Untergruppe von N und $N \trianglelefteq G$, dann ist auch $H \trianglelefteq G$.

(c) Folgt allgemein aus $H \trianglelefteq N$ und $N \trianglelefteq G$, dass $H \trianglelefteq G$ ist?

Aufgabe 3.3 (10 Punkte).

(a) Sei $c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (t, z) \mapsto e^{ct} \cdot z$$

eine Operation der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf der Menge $\mathbb{C}$ definiert wird, und geben Sie für $c \in \{1, i\}$ die Stabilisatoren und Bahnen dieser Operation an.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ durch Konjugation auf $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ operiert, und finden Sie eine Menge von Matrizen, die genau ein Element aus jeder Bahn enthält.

Aufgabe 3.4 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Falls die Quotientengruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist, dann ist G abelsch.

(b) Falls $|G| = p^n$ für eine Primzahl p und ein $n \in \mathbb{N}$ ist, so gilt $Z(G) \neq \{1\}$.

Tipp: Betrachten Sie die Operation von G auf sich selbst durch Konjugation.

(c) Folgern Sie aus (a) und (b): Wenn $|G| = p^2$ für eine Primzahl p ist, dann ist G abelsch.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 4.1 (10 Punkte).

(a) Bestimmen Sie alle Untergruppen der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_4$.

(b) Zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm der Inklusionen von Untergruppen.

(c) Welche Untergruppen sind konjugiert zueinander? Welche sind Normalteiler in $\mathfrak{A}_4$?

Aufgabe 4.2 (10 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Es sei M die Menge aller Funktionen $f : G \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass G auf M operiert via

$$(g \bullet f)(x) \;:=\; f(g^{-1}x) \quad \text{für} \quad f \in M,\; g \in G,$$

und beschreiben Sie die Menge

$$\operatorname{Fix}(G, M) \;:=\; \big\{\, f \in M \mid g \bullet f = f \text{ für alle } g \in G \,\big\} \;\subseteq\; M$$

der Fixpunkte für diese Operation. Wieviele Fixpunkte gibt es?

(b) Was besagt die Bahnformel für die obige Operation in dem Fall, dass G zyklisch von Primzahlordnung p ist? Folgern Sie daraus einen weiteren Beweis des kleinen Satzes von Fermat:

$$n^p \;\equiv\; n \pmod p \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 4.3 (10 Punkte). Beantworten Sie folgende Frage mit dem Lemma von Burnside: Wie viele Arten von Perlenketten mit 9 Perlen kann man aus jeweils genau zwei roten, drei blauen und vier grünen Perlen bilden, wenn

(a) die Ketten einen Anfang und ein Ende haben sollen ("lineare Kette")?

(b) die Ketten geschlossen sein sollen ("zyklische Kette")?

Aufgabe 4.4 (10 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe mit einem Normalteiler $N \trianglelefteq G$, und es sei

$$f : \quad G \twoheadrightarrow G/N, \quad g \mapsto gN.$$

Sei p prim. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für Untergruppen $H \leq G$ äquivalent sind:

(a) H ist eine p-Sylowgruppe in G.

(b) $H \cap N$ ist eine p-Sylowgruppe in N, und $f(H)$ ist eine p-Sylowgruppe in G/N.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 5.1 (10 Punkte). Sei $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p.

(a) Wieviele Elemente enthält die allgemeine lineare Gruppe $G := \mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_p)$?

(b) Sei $H \leq G$ die Untergruppe erzeugt von

$$M := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G.$$

Bestimmen Sie den Normalisator $N_G(H)$. Wieviele Elemente enthält er?

(c) Folgern Sie, dass für die Anzahl n_p der p-Sylowgruppen in G gilt: $n_p = p + 1$.

Aufgabe 5.2 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie: Es gibt keine einfache Gruppe G der Ordnung $|G| \in \{6, 28, 496, 8128\}$.

(b) Finden Sie auf `http://oeis.org/` eine Fortsetzung von $6, 28, 496, 8128, \ldots$ zu einer Folge ganzer Zahlen, in der keine Ordnung einer einfachen Gruppe vorkommt.

Aufgabe 5.3 (10 Punkte).

(a) Sei G eine Gruppe, und seien $P, Q \trianglelefteq G$ Normalteiler mit $P \cap Q = \{1\}$, $P \cdot Q = G$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$G \simeq P \times Q$$

(b) Folgern Sie: Jede Gruppe G der Ordnung $|G| = 20\,449 = 11^2 \cdot 13^2$ ist abelsch.

Aufgabe 5.4 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.

(a) Zeigen Sie, dass G genau eine 11-Sylowgruppe $H \leq G$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass für ihre Automorphismengruppe gilt: $\mathrm{Aut}(H) \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

(c) Folgern Sie durch Betrachten der Konjugationsoperation von G, dass $H \leq Z(G)$ ist.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 6.1 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$. Zeigen Sie:

(a) Für die derivierten Gruppen gilt $(G/N)^{(i)} \simeq G^{(i)}/G^{(i)} \cap N \simeq G^{(i)}N/N$.

(b) Die Gruppe G ist auflösbar genau dann, wenn N und G/N auflösbar sind.

Aufgabe 6.2 (10 Punkte).

(a) Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

Für jede Untergruppe $N \leq G$ existiert eine Untergruppe $H \leq G$ mit $G/N \simeq H$.

Hinweis: Sie dürfen den *Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen* benutzen.

(b) Finden Sie in der Quaternionengruppe

$$G := \langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, xyx = y \rangle$$

einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$, sodass G/N zu keiner Untergruppe von G isomorph ist.

Aufgabe 6.3 (10 Punkte). Sei G eine Gruppe. Wir definieren rekursiv Untergruppen $G_i \leq G$ durch

$$G_0 := G \quad \text{und} \quad G_i := [G, G_{i-1}] \quad \text{für } i \in \mathbb{N}.$$

Die Gruppe G heißt *nilpotent*, falls ein $i \in \mathbb{N}$ existiert mit $G_i = \{1\}$. Zeigen Sie:

(a) Nilpotente Gruppen sind auflösbar, aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

(b) Für p prim ist jede p-Gruppe G nilpotent (Tipp: Nach Aufgabe 3.4 ist $Z(G) \neq \{1\}$).

Aufgabe 6.4 (10 Punkte). Sei K ein Körper und $\mathrm{PSL}_2(K) := \mathrm{SL}_2(K)/\{\pm 1\}$.

(a) Zeigen Sie: Für $|K| > 3$ ist $\mathrm{PSL}_2(K)$ eine einfache Gruppe.

(b) Zeigen Sie in den folgenden Schritten, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$ ist:

- Wieviele Geraden gibt es in dem $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $(\mathbb{F}_3)^2 = \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3$?
- Betrachten Sie die Operation von $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ auf der Menge dieser Geraden.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 7.1 (10 Punkte). Welche der folgenden Ideale sind Hauptideale, welche der Ideale sind prim und welche sind maximal? Geben Sie für die Hauptideale jeweils auch einen Erzeuger an:

$$I_1 = (117, 195, 273) \subseteq R_1 = \mathbb{Z}, \qquad I_3 = (x^2 - 2x + 1, 2x - 2) \subseteq R_3 = \mathbb{Q}[x],$$

$$I_2 = (x^2 - 2x + 1, 2x - 2) \subseteq R_2 = \mathbb{Z}[x], \qquad I_4 = (xz - y^2, yt - z^2) \subseteq R_4 = \mathbb{Q}[x, y, z, t].$$

Aufgabe 7.2 (10 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie:

(a) $S := \{ f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k \in R[z] \mid a_1 = 0 \} \subseteq R[z]$ ist ein Teilring.

(b) Die Abbildung $R[x, y] \longrightarrow S, f(x, y) \mapsto f(z^2, z^3)$ induziert einen Isomorphismus von Ringen

$$\varphi : \quad R[x, y]/(y^2 - x^3) \xrightarrow{\sim} S.$$

Aufgabe 7.3 (10 Punkte). Sei $I \subseteq R$ ein Ideal eines kommutativen Rings R, und sei $S \subseteq R$ eine bezüglich der Multiplikation abgeschlossene Teilmenge mit $1 \in S$ und $I \cap S = \varnothing$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathcal{M} := \{ \text{Ideale } J \subseteq R \mid I \subseteq J,\ J \cap S = \varnothing \}$ hat bzgl. $\subseteq$ maximale Elemente.

(b) Jedes bezüglich $\subseteq$ maximale Element $J \in \mathcal{M}$ ist ein Primideal in R.

Aufgabe 7.4 (10 Punkte). Sei K ein Körper. Ein $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ heißt *symmetrisch*, wenn es unter allen Vertauschungen von Variablen invariant ist, also für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ gilt: $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$. Zeigen Sie:

(a) Die symmetrischen Polynome bilden einen Teilring $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$.

(b) Für $f \in S$ bezeichne $f_{\max}$ das bezüglich der lexikographischen Ordnung maximale in f vorkommende Monom. Seien $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch $f_{\max} = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, dann gilt

$$f_{\max} = \left(e_1^{k_1 - k_2} e_2^{k_2 - k_3} \cdots e_n^{k_n} \right)_{\max} \quad \text{mit} \quad e_\nu := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_\nu \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_\nu} \in S.$$

(c) Jedes Element von S lässt sich eindeutig als Polynom in $e_1, \dots, e_n$ darstellen, d.h. der durch

$$\varphi : \quad K[y_1, \dots, y_n] \longrightarrow S \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \varphi(y_\nu) := e_\nu \\ \varphi|_K := id_K \end{cases}$$

definierte Ringhomomorphismus ist ein Isomorphismus.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 8.1 (10 Punkte). Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

(a) Ist jeder Teilring eines faktoriellen Ringes faktoriell?

(b) Ist jede Lokalisierung eines faktoriellen Ringes faktoriell?

Aufgabe 8.2 (10 Punkte).

(a) Zerlegen Sie $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x - 5$ in irreduzible Faktoren in $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Zeigen Sie, dass für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ mit $a_0, a_n \neq 0$ folgende Aussagen äquivalent sind:

- Das Polynom $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.
- Das Polynom $\tilde{g}(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

(c) Zeigen Sie: Das Polynom $h(x) = 6x^5 - 9x^3 + 12x^2 - 4$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

Aufgabe 8.3 (10 Punkte).

(a) Sei $K \subseteq L \subseteq M$ eine Kette von Körpererweiterungen. Zeigen Sie:

$$M/K \text{ ist algebraisch} \quad \Longleftrightarrow \quad M/L \text{ und } L/K \text{ sind algebraisch}$$

(b) Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K. Zeigen Sie:

- Es ist $[K(\alpha,\beta) : K] \;\leq\; [K(\alpha) : K] \cdot [K(\beta) : K]$.
- Dabei gilt Gleichheit, falls $\operatorname{ggT}([K(\alpha) : K], [K(\beta) : K]) = 1$ ist.

Aufgabe 8.4 (10 Punkte). Sei $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad n. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist

$$f(x) \;=\; \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

wobei $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ genau die komplexen Nullstellen von f sind.

(a) Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 7.4, dass $\Delta(f) := \prod_{i<j} (a_i - a_j)^2 \in \mathbb{Q}$ ist.

(b) Sei nun $f(x) = x^3 + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$. Berechnen Sie $\Delta(f)$ abhängig von a, b, und zeigen Sie:

$$\Delta(f) \;\geq\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{alle Nullstellen von } f \text{ sind reell}$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 9.1 (10 Punkte).

(a) Finden Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 4 im Polynomring $\mathbb{F}_2[x]$.

(b) Zeigen Sie: Für $n = 4, 8, 16$ gibt es einen Körper $\mathbb{F}_n$ mit genau n Elementen.

Aufgabe 9.2 (10 Punkte). Sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = 2$.

(a) Zeigen Sie, dass es im Fall $\mathrm{char}(K) \neq 2$ ein Element $a \in K$ gibt mit $L = K(\sqrt{a})$.

(b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass dies im Fall $\mathrm{char}(K) = 2$ nicht gelten muß.

Aufgabe 9.3 (10 Punkte).

(a) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ und $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$.

- Bestimmen Sie den Körpergrad $[K : \mathbb{Q}]$.
- Schreiben Sie α^{-1} als eine $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$.
- Folgern Sie $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ und bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

(b) Sei $L = \mathbb{Q}(x)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{Q}$. Sei $K = \mathbb{Q}(f) \subseteq L$ der Teilkörper erzeugt von

$$f = \frac{x^2}{x^3 + 1} \in L.$$

Ist die Erweiterung L/K algebraisch? Ist die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ algebraisch?

Aufgabe 9.4 (10 Punkte).

(a) Ist der Körper $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ normal über $K = \mathbb{Q}$?

(b) Sei $L = \mathbb{Q}(a)$ für die komplexe Zahl $a = (1 + i)\sqrt[4]{5} \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

- Es ist $K := \mathbb{Q}(i\sqrt{5}) \subseteq L$.
- Die Erweiterungen L/K und $K/\mathbb{Q}$ sind normal.
- Die Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ ist nicht normal.

(c) Finden Sie den Grad des Zerfällungskörpers von $f(x) = x^6 - 4$ über $K = \mathbb{Q}$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 10.1 (10 Punkte). Sei L/K ein Zerfällungskörper von $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1 \in K[x]$ über

(a) $K = \mathbb{Q}$,

(b) $K = \mathbb{F}_5$.

Bestimmen Sie jeweils den Grad $[L : K]$, den Isomorphietyp der Gruppe $\operatorname{Aut}(L/K)$ und die Wirkung der Gruppenelemente auf einer Basis des K-Vektorraumes L.

Aufgabe 10.2 (10 Punkte). Sei L/K ein Zerfällungskörper von $f \in K[x]$, und sei $n = \deg(f)$.

(a) Zeigen Sie, dass $[L : K]$ ein Teiler von $n!$ ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel mit $n \geq 3$ und $[L : K] = n!$ an.

(c) Geben Sie ein Beispiel mit $n < [L : K] < n!$ an.

Aufgabe 10.3 (10 Punkte). Sei $\mathbb{F}_p(x, y)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{F}_p$ in zwei Variablen, also der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[x, y]$, für p prim. Wir betrachten die Körpererweiterung

$$K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p) \subseteq L = \mathbb{F}_p(x, y).$$

Zeigen Sie:

(a) Es ist $[L : K] = p^2$ und $a^p \in K$ für alle $a \in L$.

(b) Es ist $L \neq K(a)$ für alle $a \in L$.

(c) Es ist $\operatorname{Aut}(L/K) = \{1\}$.

(d) Die Erweiterung L/K besitzt unendlich viele verschiedene Zwischenkörper.

Tipp: Betrachten Sie die Zwischenkörper $K_n := K(x + y^n)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid n$.

Aufgabe 10.4 (10 Punkte).

(a) Sei L/K eine Körpererweiterung. Seien $a, b \in L^\times$ mit $a^m, b^n \in K$ für zwei teilerfremde Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$K(a, b) = K(c) \quad \text{für das Produkt} \quad c = ab.$$

(b) Bestimmen Sie die Gruppe $\operatorname{Aut}(L/\mathbb{Q})$ für

(i) einen Zerfällungskörper $L/\mathbb{Q}$ des Polynoms $f(x) = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(ii) einen Zerfällungskörper $L/\mathbb{Q}$ des Polynoms $g(x) = x^6 + 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 11.1 (10 Punkte). Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung, und $K \subseteq K_1, K_2 \subseteq L$ seien Zwischenkörper. Das *Kompositum* $K_1K_2 \subseteq L$ ist definiert als der kleinste Teilkörper von L, der $K_1 \cup K_2$ enthält. Zeigen Sie:

(a) Es ist
$$\mathrm{Gal}(L/K_1K_2) \;=\; \mathrm{Gal}(L/K_1) \cap \mathrm{Gal}(L/K_2) \;\leq\; \mathrm{Gal}(L/K).$$

(b) Wenn K_1/K eine Galoiserweiterung ist, so auch K_1K_2/K_2 und wir haben dann einen Monomorphismus
$$\mathrm{Gal}(K_1K_2/K_2) \;\hookrightarrow\; \mathrm{Gal}(K_1/K).$$

Aufgabe 11.2 (10 Punkte). Finden Sie

(a) alle Teilkörper von $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$,

(b) alle Teilkörper von $L = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/8})$.

Aufgabe 11.3 (10 Punkte). Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Wenn $H \leq \mathfrak{S}_p$ eine Untergruppe ist, die transitiv auf der Menge $\{1, \ldots, p\}$ operiert und eine Transposition enthält, dann gilt $H = \mathfrak{S}_p$.

(b) Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg(f) = p$, das genau $p-2$ reelle Nullstellen hat. Dann ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathfrak{S}_p$.

(c) Die Nullstellen von $f(x) = x^5 - 20x + 6$ lassen sich nicht durch Radikale ausdrücken.

Aufgabe 11.4 (10 Punkte).

(a) In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar?

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z \cdot \mathrm{Re} z$.
- $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = |z|^2$.
- $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ h(z) = z/|z|$.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie, dass für jede komplex differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auch die Funktion

$$g : \quad \overline{U} \;:=\; \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in U\} \;\longrightarrow\; \mathbb{C}, \quad g(z) := \overline{f(\overline{z})} \qquad \text{komplex differenzierbar ist.}$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 12.1 (10 Punkte).

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\mathrm{Re}(f(z))) = x^2 + axy + by^2 \quad \text{für} \quad x = \mathrm{Re}(z),\ y = \mathrm{Im}(z).$$

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

(i) Wenn $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ gilt, ist f konstant. (ii) Wenn $|f|$ konstant ist, dann ist f konstant.

Aufgabe 12.2 (10 Punkte).

(a) Schreiben Sie den Real- und Imaginärteil von $f(z) = \exp(z^2)$ als Funktion von $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$, und rechnen Sie die Cauchy-Riemannschen DGL nach.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für im reellen Sinn stetig differenzierbare Funktionen $f : U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$\partial f \ := \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(f) \quad \text{und} \quad \overline{\partial} f \ := \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(f).$$

Zeigen Sie: Es ist f holomorph genau dann, wenn $\overline{\partial} f = 0$ ist. In diesem Fall ist $f' = \partial f$.

Aufgabe 12.3 (10 Punkte). Zeigen Sie: Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \begin{cases} \exp(-1/z^4) & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0, \end{cases}$$

ist partiell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemannschen DGL. Ist sie holomorph?

Aufgabe 12.4 (10 Punkte). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei $\gamma : [0,1] \to U$ ein *glatter Pfad*, also eine im Sinn der reellen Analysis stetig differenzierbare Abbildung vom Einheitsintervall in die komplexe Ebene. Das *Pfadintegral* über eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ entlang γ ist definiert durch

$$\int_\gamma f(z)dz \ := \ \int_0^1 \mathrm{Re}\big(f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)dt \ + \ i\int_0^1 \mathrm{Im}\big(f(\gamma(t))\gamma'(t)\big)dt$$

mit $\gamma'(t) := \frac{d}{dt}\mathrm{Re}(\gamma(t)) + i\frac{d}{dt}\mathrm{Im}(\gamma(t))$. Berechnen Sie für $r \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ die Integrale $\int_{\gamma_\alpha} f_\beta(z)dz$ über die folgenden Pfade und Funktionen:

$$\begin{aligned} & & f_1(z) &= |z|^2 \\ \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad & t \mapsto r \cdot (1-2t) & f_2(z) &= z^2 \\ \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad & t \mapsto r \cdot \exp(\pi i t) & f_3(z) &= 1/(z^2+1) \end{aligned}$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 13.1 (10 Punkte). Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $f(z_0) = 0 \neq f'(z_0)$. Zeigen Sie

$$\oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{1}{f(z)}\,dz \;=\; \frac{2\pi i}{f'(z_0)} \quad \text{für alle genügend kleinen } \epsilon > 0.$$

Aufgabe 13.2 (10 Punkte). Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$.

(a) Zeigen Sie mit dem Integralsatz von Cauchy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+i\alpha)^2}{2}\right) dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Hinweis: Betrachten Sie Rechtecke mit den Eckpunkten $\pm R$ und $\pm R + i\alpha$ für $R \to \infty$.

(b) Aus der reellen Analysis wissen wir, dass das Integral auf der rechten Seite gleich $\sqrt{2\pi}$ ist; dies darf hier ohne Beweis benutzt werden. Folgern Sie:

$$\int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cos(\alpha x)dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Aufgabe 13.3 (10 Punkte). Berechnen Sie mit der Cauchy-Formel folgende Pfadintegrale:

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \left(\frac{\exp(z)}{z} + 1\right) dz,$ (b) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{z^2+1} dz,$ (c) $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{\exp(\exp(z))}{(z-i)^3} dz.$

Aufgabe 13.4 (10 Punkte). Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

(a) Wenn ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ existiert, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ von großem Betrag $|z| \gg 0$ die Abschätzung

$$|f(z)| \;\leq\; |p(z)|$$

gilt, dann ist f ebenfalls ein Polynom und es gilt $\deg(f) \leq \deg(p)$.

(b) Wenn $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $|f(z)| \leq c \cdot e^{|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt, so ist

$$|a_n| \;\leq\; c \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen auf moodle ab. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 14.1 (10 Punkte). Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

- $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$, und
- $f(0) = 0$ sowie $f(z_0) = z_0$ für mindestens ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$.

Zeigen Sie, dass dann bereits $f(z) = z$ für alle $z \in D$ gelten muß.

Aufgabe 14.2 (10 Punkte). Bestimmen Sie die Laurentreihe der Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \quad \text{auf den drei Kreisringen} \quad \begin{cases} R_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}, \\ R_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}, \\ R_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z|\}. \end{cases}$$

Aufgabe 14.3 (10 Punkte). Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Typ der Singularitäten in allen Nullstellen des Nenners. Für hebbare Singularitäten gebe man die Fortsetzung in diesem Punkt an, für Pole den Hauptteil der Laurentreihe:

$$f(z) \;=\; \frac{(z-1)^2(z+3)}{1-\sin(\pi z/2)}, \qquad g(z) \;=\; \frac{\cos(z)-1}{z^4}, \qquad h(z) \;=\; \sin\left(\frac{\pi}{z^2+1}\right).$$

Aufgabe 14.4 (10 Punkte).

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit dem Residuensatz:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx.$$

(b) Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$, und es gelte

$$\overline{D} \;=\; \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \;\subseteq\; U.$$

Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ gegeben ist durch die Formel

$$f^{-1}(w) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - w| = r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta \quad \text{fr} \quad w \;\in\; f(D).$$