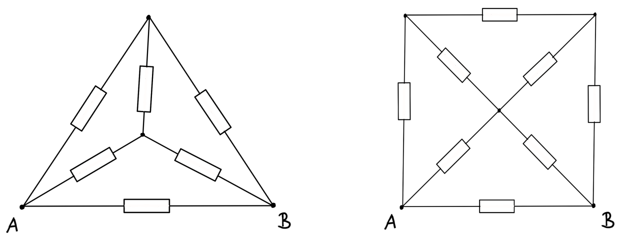
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I* — Übungsblatt 0

HU Berlin, Prof. Dr. T. Krämer — keine Abgabe

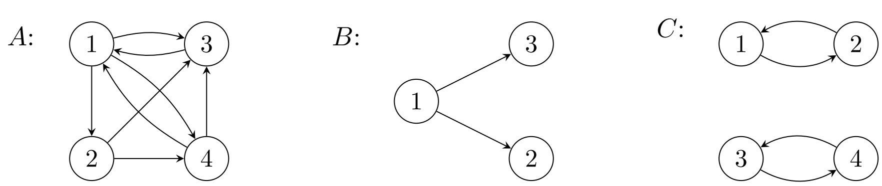
Aufgabe 0.1. In den folgenden Schaltungen in Form eines Dreiecks bzw. Vierecks seien alle eingezeichneten Widerstände gleich $R = 1\Omega$:



Wir legen zwischen den Punkten A und B eine Spannung von $U = 1V$ an. Welche Ströme fließen durch die eingezeichneten Widerstände? Können Sie Ihr Ergebnis verallgemeinern auf Schaltungen in Form eines Fünfecks, Sechsecks, …?

Tipp: Nutzen Sie Symmetrieargumente, um die Zahl der Variablen zu verringern.

Aufgabe 0.2. Berechnen Sie den PageRank für das in der Vorlesung gezeigte Beispiel des Internetgraphen A für die Dämpfungskonstanten $d = 1$, $d = 0.5$ und $d = 0$. Was passiert für die anderen beiden Graphen B und C?



Aufgabe 0.3. In den Logeleien von Zweistein findet sich folgendes Rezept zu einer Soße. Man nehme

(a) Thymian und dazu von Majoran und Salbei mindestens ein Gewürz.

(b) sowohl Salbei als auch Majoran.

(c) sowohl Oregano als auch Chilipulver.

(d) weder Salbei noch Thymian, und von Oregano und Chilipulver maximal eines.

(e) weder Oregano noch Majoran.

(f) weder Chilipulver noch Salbei.

Der Koch befolgt *keine* dieser Vorschriften. Wie würzt er seine Soße?

Geben Sie Ihre Lösungen zu den Aufgaben in Gruppen von bis zu 4 Personen ab und folgen Sie dabei den Hinweisen für die Abgabe auf moodle. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 1.1 (10 Punkte).

(a) Seien A, B variable Aussagen.

(1) Finden Sie die Wahrheitstafel der Aussage $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$.

(2) Für wieviele Pfeile ist $(\cdots((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \cdots \Rightarrow A)$ eine Tautologie?

(b) Beweisen Sie per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formeln

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \;=\; \frac{n}{n+1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot k \;=\; 2^{n+1} \cdot (n-1) + 2.$$

Aufgabe 1.2 (10 Punkte). Zeigen Sie, dass für Abbildungen $f : M \to N$ folgende drei Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv,

(b) für alle $A, B \subseteq M$ ist $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

(c) für alle $A \subseteq B \subseteq M$ ist $f(B \setminus A) = f(B) \setminus f(A)$.

Aufgabe 1.3 (10 Punkte). Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Geben Sie ein Rechts- bzw. Linksinverses an, falls ein solches existiert:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x^2 + x$,

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$,

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (2x, 3y, x + y)$,

(d) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ (a, b) \mapsto a/b$,

(e) $f : [0, 1] \to [0, 1],\ x \mapsto (1 - x)/(1 + x)$.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, zählen aber zum Vorlesungsstoff und können in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1.4 (keine Abgabe). Gibt es eine in- bzw. sur- bzw. bijektive Abbildung f zwischen den angegebenen Mengen? Finden Sie jeweils ein Beispiel oder beweisen Sie, dass es keine solchen Beispiele gibt.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

(d) $f : [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \to [0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$,

(e) $f : X \to \mathcal{P}(X)$ für eine Menge X mit Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$.

Aufgabe 1.5 (keine Abgabe). Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen?

(a) Die Relation $a \sim b \Leftrightarrow |a - b| \leq 1$ auf der Menge $M = \mathbb{R}$.

(b) Die Relation $a \sim b \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : a - b = \frac{m}{2n-1}$ auf der Menge $M = \mathbb{Q}$,

(c) Die Relation $a \sim b \Leftrightarrow a(1) = b(1)$ auf der Menge $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Hier setzen wir

$$\mathrm{Abb}(A, B) \;=\; \big\{\text{Abbildungen } f : A \to B\big\} \quad \text{für Mengen } A, B.$$

(d) Die Relation $a \sim b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : a(x) = b(x)$ auf der Menge $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(e) Die Relation $a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a(n) - b(n)) = 0$ auf $M = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 2.1 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G abelsch ist genau dann, wenn $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ ein Homomorphismus ist.

(b) Sei $f : G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Beantworten Sie jeweils durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

- Ist für jede abelsche Untergruppe $A \subseteq G$ das Bild $f(A)$ abelsch?
- Ist für jede abelsche Untergruppe $B \subseteq H$ das Urbild $f^{-1}(B)$ abelsch?

Aufgabe 2.2 (10 Punkte).

Zeigen Sie, dass die Menge $G := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0\}$ eine Gruppe bildet bezüglich der Verknüpfung

$$(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) \ := \ (a_1a_2,\, a_1b_2 + b_1).$$

Ist diese Gruppe abelsch?

Aufgabe 2.3 (10 Punkte).

(a) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für *endliche* Teilmengen $H \subseteq G$ folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

- H ist eine Untergruppe von G,
- $H \neq \varnothing$ und für alle $a, b \in H$ ist auch $ab \in H$.

(b) Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $\varphi : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 2.4 (keine Abgabe).

(a) Sei $\sim$ eine reflexive Relation auf einer Menge $M \neq \varnothing$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist genau dann, wenn gilt:

$$\forall a, b, c \in M : \quad (a \sim b) \wedge (a \sim c) \implies (b \sim c)$$

(b) Finden Sie für $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die feinste Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ mit

$$(1, 2), (1, 3), (4, 5) \in R,$$

und beschreiben Sie die Äquivalenzklassen. Der Begriff *feinste* meint dabei, dass die Teilmenge $R \subseteq M \times M$ minimal mit der geforderten Eigenschaft ist.

Aufgabe 2.5 (keine Abgabe).

(a) Wieviele Elemente hat die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ für $n \in \mathbb{N}$?

(b) Sei jetzt $n = 3$. Wir schreiben dann $\mathfrak{S}_3 = \{e, s_1, s_2, s_3, r_1, r_2\}$, wobei die sechs Elemente der symmetrischen Gruppe durch folgende Wertetabelle gegeben seien:

n	$e(n)$	$s_1(n)$	$s_2(n)$	$s_3(n)$	$r_2(n)$	$r_2(n)$
1	1	1	3	2	2	3
2	2	3	2	1	3	1
3	3	2	1	3	1	2

Stellen Sie die Verknüpfungstafel für $\mathfrak{S}_3$ auf!

(c) Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken mit $1, 2, 3$ numeriert sind. Können Sie die Gruppe $\mathfrak{S}_3$ in diesem Bild geometrisch verstehen?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 3.1 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass für alle Gruppen G_1 und G_2 das Produkt $G_1 \times G_2$ eine Gruppe ist mit

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \;:=\; (a_1 b_1, a_2 b_2) \quad \text{für} \quad a_1, b_1 \in G_1, a_2, b_2 \in G_2.$$

(b) Welche der folgenden vier Gruppen

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

sind zueinander isomorph? Geben Sie jeweils einen Isomorphismus an oder zeigen Sie, dass es keinen solchen Isomorphismus gibt.

Aufgabe 3.2 (10 Punkte).

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl. Zeigen Sie, dass die Menge

$$G \;:=\; \{a + b\sqrt{m} \in \mathbb{R} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \text{ und } (a, b) \neq (0, 0)\}$$

eine Gruppe bildet mit der Verknüpfung

$$(a + b\sqrt{m}) \cdot (c + d\sqrt{m}) \;:=\; (ac + mbd) + (ad + bc)\sqrt{m}.$$

(b) Finden Sie $a, b \in \mathbb{Q}$ mit

$$a + b\sqrt{3} \;=\; (1 - \sqrt{3})^{-1}$$

Aufgabe 3.3 (10 Punkte). Unter einem *Automorphismus* einer Gruppe G versteht man einen Isomorphismus der Gruppe auf sich. Sei $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge aller solcher Automorphismen. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(G)$.

(b) Für alle $g \in G$ ist die Konjugationsabbildung $c_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$ ein Automorphismus, und

$$\varphi : \; G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G), \; g \;\mapsto\; c_g \quad \text{ist ein Homomorphismus.}$$

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 3.4 (keine Abgabe).

(a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphismus alle Gruppen G der Ordnung ≤ 6.

(b) Sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n = |G|$. Zeigen Sie, dass dann

$$\operatorname{ord}(g^k) \;=\; \frac{n}{\operatorname{ggT}(k,n)}$$

ist für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wieviele Erzeuger besitzt die Gruppe $G = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$?

Aufgabe 3.5 (keine Abgabe). Unter einer 2×2 Matrix verstehen wir eine Tabelle der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit Einträgen } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren eine Verknüpfung “ $\cdot$ ” auf der Menge $\operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ solcher Matrizen durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

(a) Auf der Teilmenge

$$G \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \;\subseteq\; \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$$

schränkt sich “ $\cdot$ ” ein zu einer Verknüpfung $\cdot : G \times G \longrightarrow G$

(b) Bezüglich dieser Verknüpfung bildet diese Teilmenge eine Gruppe $(G, \cdot\,)$.

(c) Die so erhaltene Gruppe ist isomorph zur Gruppe aller Drehungen um den Ursprung in der reellen Ebene.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 4.1 (10 Punkte). Zeigen Sie:

(a) Ist K ein Körper und $R \neq \{0\}$ ein Ring, dann ist jeder Homomorphismus von Ringen
$$\varphi : \quad K \longrightarrow R \quad \text{injektiv.}$$

(b) Ist R ein Integritätsring mit $n \cdot 1_R := 1_R + \cdots + 1_R = 0_R$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Charakteristik
$$p \ := \ \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1_R = 0_R\} \quad \text{eine Primzahl.}$$

Aufgabe 4.2 (10 Punkte).

(a) Was ist die letzte Ziffer der Zahl $2^{n+2} + 7^n$ für $n \in \mathbb{N}$?

(b) Finden Sie mit dem Euklidischen Algorithmus $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $7 \cdot x + 1111 \cdot y = 1$.

(c) Welche Elemente des Ringes $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ sind multiplikativ invertierbar?
Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})^\times$ dieses Ringes zyklisch ist.

Aufgabe 4.3 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge
$$\mathbb{Z}[i] \quad := \quad \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \ \subseteq \ \mathbb{C}$$
einen Teilring des Körpers der komplexen Zahlen bildet.

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppe dieses Teilrings. Ist sie zyklisch?
Tipp: Betrachten Sie den Absolutbetrag $|z|$ von Elementen $z \in \mathbb{Z}[i]$...

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 4.4 (keine Abgabe).

(a) Bestimmen Sie alle Ringhomomorphismen

$$f: \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Q}[i], \qquad g: \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h: \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(b) Folgern Sie aus den Additionstheoremen für sin und cos die Formel von de Moivre

$$\big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\big)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}$$

und berechnen Sie damit die komplexe Zahl $(1+i)^n + (1-i)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.5 (keine Abgabe). Bis 2007 wurden für Bücher die sogenannten ISBN-10 benutzt. Diese bestanden aus neun Ziffern $a_1, \ldots, a_9 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und einer Prüfziffer $p \in \{0, 1, \ldots, 9, X\}$. Die Prüfziffer diente zur Kontrolle und ergab sich aus

$$p \equiv a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 9a_9 \bmod 11$$

wobei wir $X := 10$ setzen. Zeigen Sie, dass die Prüfziffer folgende Fehler erkennt:

(a) Änderung einer Ziffer a_i unter Beibehaltung der übrigen Ziffern.

(b) Vertauschung zweier verschiedener Ziffern $a_i \neq a_j$ ohne Änderung der übrigen.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 5.1 (10 Punkte). Sei $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie Polynome $Q, R \in K[x]$ mit

$$F \ = \ Q \cdot G + R \quad \text{und} \quad \deg(R) < \deg(G) \quad \text{für} \quad \begin{cases} F \ = \ 2x^4 - 3x^2 + 4x - 5, \\ G \ = \ 4x + 2. \end{cases}$$

Schreiben Sie dabei Ihr Endergebnis als Polynome mit Koeffizienten in $\{0, 1, \dots, 10\}$.

Aufgabe 5.2 (10 Punkte). Welche der folgenden Teilmengen $U_1, \dots, U_6 \subseteq \mathbb{R}^3$ sind $\mathbb{R}$-Untervektorräume bezüglich der üblichen Addition und Skalarmultiplikation?

$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\}$,

$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y = 1\}$,

$U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \geq 0\}$,

$U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = z = 0\}$,

$U_5 = \{(a^3 + 1, b^3 - 1, a^3 + b^3) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$,

$U_6 = \{(a^3 + 1, b^3 - 2, a^3 + b^3) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 5.3 (10 Punkte). Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 \ = \ \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_4 \ = \ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \ \in \ \mathbb{R}^3$$

(a) Sei $U = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \{x v_1 + y v_2 \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Ist dann $v_3 \in U$? Ist $v_4 \in U$?

(b) Prüfen Sie direkt anhand der Definition nach, für welche $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Vektoren v_1, v_2, v_k ein linear unabhängiges System bilden.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 5.4 (keine Abgabe). Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum aller Folgen reeller Zahlen mit der üblichen gliedweisen Addition und Skalarmultiplikation. Welche der hier angegebenen Teilmengen $U_1, \ldots, U_6 \subseteq V$ sind $\mathbb{R}$-Untervektorräume?

- $U_1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \exists c \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c\}$,
- $U_2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : a_n = 0\}$,
- $U_3 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$,
- $U_4 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = a_{n+1} + 1\}$,
- $U_5 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+k} = a_n\}$,
- $U_6 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N} : a_{n+k} = a_n\}$.

Aufgabe 5.5 (keine Abgabe).**

(a) Zeigen Sie, dass der Teilring $R = \mathbb{Z}[i] \subseteq \mathbb{C}$ Euklidisch ist.

(b) Betrachten Sie den Teilring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + ib\sqrt{5} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

  (1) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $R^\times$.

  (2) Finden Sie alle $a, b \in R$ mit $2 = ab$ oder $3 = ab$.

  (3) Zeigen Sie, dass der Ring R nicht Euklidisch sein kann.

  Tipp: Nehmen Sie an, der Ring wäre doch Euklidisch, und wählen Sie ein Element $a \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$, das seine Gradfunktion minimiert. Wie sähe die Division mit Rest durch a aus? Beweisen Sie, dass $a \in \{\pm 2, \pm 3\}$ wäre, und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 6.1 (10 Punkte).

(a) Sind die Vektoren $(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5) \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

(b) Finden Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ mit

$$v \notin \big\langle (1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1) \big\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Aufgabe 6.2 (10 Punkte).

(a) Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U \;=\; \{P \in V \mid \deg(P) \leq 3, P(0) = P(3) = 0\} \;\subseteq\; V$$

ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum ist, und bestimmen Sie seine Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(U)$.

(b) Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U_i)$ für die Untervektorräume

$$\begin{aligned} U_1 &:= \big\langle \sin, \exp \big\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq V \\ U_2 &:= \big\langle f, \sin, \cos \big\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq V \end{aligned}$$

wobei $f \in V$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x + \pi/4)$ bezeichne.

Aufgabe 6.3 (10 Punkte).

(a) Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Betrachten Sie in $V = K^n$ für $n \geq 3$ die Vektoren

$$v_i \;=\; (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$$

mit einer Null an der i-ten Stelle und Einsen überall sonst. Berechnen Sie die Dimension

$$\dim_K(U) \quad \text{der linearen Hülle} \quad U := \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K.$$

(b) Was ändert sich, wenn der Körper K die Charakteristik $p > 0$ besitzt?

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 6.4 (keine Abgabe).

(a) Prüfen Sie nach, dass die Menge

$$V \;:=\; \left\{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig mit } f(x+2\pi) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \,\right\}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ist.

(b) Für $i \in \mathbb{N}$ seien $v_i \in V$ definiert durch

$$v_i(x) \;:=\; \begin{cases} \cos(nx) & \text{für } i = 2n-1 \text{ ungerade} \\ \sin(nx) & \text{für } i = 2n \text{ gerade} \end{cases}$$

Zeigen Sie wie folgt, dass das System $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig ist:

1) Angenommen, es wäre $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ nicht alle Null.
2) Zeigen Sie zuerst, dass $\alpha_i \neq 0$ für mindestens drei Indices i sein müßte.
3) Betrachten Sie dann die aus 1) durch zweimaliges Ableiten erhaltene Gleichung. Addieren Sie ein Vielfaches von 1) hinzu, um die Anzahl der Koeffizienten $\alpha_i \neq 0$ zu verringern, und schließen Sie induktiv.

(c) Ist $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V?

Aufgabe 6.5 (keine Abgabe). Sei K ein Körper. Betrachten Sie in $V = K^n$ für $n \geq 3$ die Unterräume

$$\begin{aligned} U_1 \quad &:= \quad \{\, (a_1, \ldots, a_n) \in K^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0 \,\}, \\ U_2 \quad &:= \quad \{\, (a_1, \ldots, a_n) \in K^n \mid a_1 = \cdots = a_n \,\}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Dimensionen $\dim_K(U_1)$, $\dim_K(U_2)$ und $\dim_K(U_1 \cap U_2)$!

Hinweis: Das Ergebnis hängt wieder von der Charakteristik des Körpers K ab.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 7.1 (10 Punkte). Es seien folgende Vektoren in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren u_1, u_2 linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.

(c) Bestimmen Sie ein $j \in \{1, 2, 3\}$, sodass u_1, u_2, v_j eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 7.2 (10 Punkte). In $V = \mathbb{R}^4$ seien die Untervektorräume

$$\begin{aligned} U_1 &= \big\{(x_1, \ldots, x_4) \in V \mid x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0\big\}, \\ U_2 &= \big\{(x_1, \ldots, x_4) \in V \mid 2x_1 - x_2 = x_3 + 3x_4 = 0\big\}, \end{aligned}$$

gegeben (dass dies Untervektorräume sind, müssen Sie hier nicht mehr zeigen).

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

(b) Ergänzen Sie diese zu Basen von U_1, U_2 und $U_1 + U_2$.

Aufgabe 7.3 (10 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum mit $n = \dim(V) < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Für Unterräume $U, H \subseteq V$ mit $\dim(H) = n - 1$ ist $\dim(U \cap H) \geq \dim(U) - 1$.

(b) Für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ und Unterräume $H_i \subseteq V$ mit $\dim(H_i) = n - 1$ ist

$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) \ \geq \ n - k.$$

(c) Jeder Unterraum $U \subseteq V$ der Dimension $\dim(U) = n - k$ lässt sich schreiben als Schnitt

$$U \ = \ H_1 \cap \cdots \cap H_k$$

wobei die $H_i \subseteq V$ geeignete Unterräume der Dimension $\dim(H_i) = n - 1$ sind.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 7.4 (keine Abgabe). Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3$ für alle Unterräume $U_i \subseteq V$.

(b) Folgern Sie mit der Dimensionformel im Fall $\dim(V) < \infty$:

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + U_2 + U_3) \quad \leq \quad & \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) \\ & -\dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_2 \cap U_3) \\ & +\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3).\end{aligned}$$

(c) Finden Sie in $V = K^3$ Unterräume $U_i \subseteq V$ mit $\dim(U_i) = 2$, sodass gilt:

- $U_i \cap U_j \cap U_k = \{0\}$ für alle $i < j < k$, aber
- $\dim(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \ > \ \sum_{i=1}^{4} \dim(U_i) - \sum_{i<j} \dim(U_i \cap U_j)$,

Aufgabe 7.5 (keine Abgabe).

(a) Sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension, und es seien $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$ Unterräume gegebener Dimension d. Zeigen Sie wie folgt, dass es dazu ein "simultanes Komplement" gibt, d.h. einen Unterraum $W \subseteq V$ mit $V = U_i \oplus W$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$:

1) Wählen Sie ein $w \in V$ mit $w \notin \bigcup_{i=1}^{m} U_i$.
2) Per Induktion gebe es ein $W' \subseteq V$ mit $V = (U_i + \langle w \rangle) \oplus W'$ für alle i.
3) Folgern Sie, dass $W := W' + \langle w \rangle$ die gewünschte Eigenschaft hat.

(b) Bleibt diese Aussage auch für endliche Körper K richtig?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 8.1 (10 Punkte).

(a) Ist die Abbildung

$$f: \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$

linear über dem Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Ist sie linear über $K = \mathbb{Q}$?

(b) Seien V und W Vektorräume über einem Körper. Zeigen Sie, dass folgende beiden Eigenschaften für Abbildungen $f : V \to W$ äquivalent zueinander sind:

(1) Die Abbildung f ist linear.

(2) $\{(v, f(v)) \in V \times W \mid v \in V\} \subseteq V \times W$ ist ein Untervektorraum.

Aufgabe 8.2 (10 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abb. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

(a) $f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$?

(b) $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$?

Zeigen Sie, dass im Fall der Existenz einer solchen Abbildung der Vektor $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt ist, und berechnen Sie diesen Vektor.

Hinweis: Sie müssen in dieser Aufgabe die Abbildung f nicht explizit angeben.

Aufgabe 8.3 (10 Punkte).

(a) Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte $A_i \cdot A_j$ für folgende Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 2 & 0\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R_\alpha := \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie mithilfe der Additionstheoreme für sin und cos das Matrizenprodukt

$$R_{-\alpha} \cdot A \cdot R_\alpha \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}),$$

und illustrieren Sie anhand einer Skizze die zugehörige lineare Abbildung.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 8.4 (keine Abgabe).

(a) Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n$. Zeigen Sie:

- Eine Familie von n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ ist linear abhängig genau dann, wenn eine Linearform $f \in V^* \setminus \{0\}$ existiert mit $f(v_1) = \cdots = f(v_n) = 0$.
- Ein Familie von n Linearformen $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ ist linear abhängig genau dann, wenn ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit $f_1(v) = \cdots = f_n(v) = 0$.

(b) Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Funktionen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation. Sei $V \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum der Dimension $n = \dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$. Zeigen Sie, dass es Punkte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad f \mapsto \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 8.5 (keine Abgabe). Zeigen Sie:

(a) Der K-Vektorraum aller *endlichen* Folgen

$$V = \left\{ (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid a_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\}$$

besitzt eine abzählbare Basis über K.

(b) Sein Dualraum ist der Vektorraum $V^* = K^{\mathbb{N}}$ *aller* Folgen.

(c) Dieser Folgenraum $K^{\mathbb{N}}$ hat keine abzählbare Basis.

Tipp: Für je abzählbar viele Folgen $f_j = (a_{ij})_{i \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ konstruiere man durch Betrachten von immer mehr Anfangsgliedern rekursiv eine Folge $f \in K^{\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $f \notin \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

In den folgenden Aufgaben sei K ein Körper.

Aufgabe 9.1 (10 Punkte). Wenn $AB = BA$ für zwei quadratische Matrizen A, B gilt, sagen wir, dass die Matrizen miteinander *kommutieren*. Welche $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$ kommutieren mit

(a) allen Matrizen $B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)$?

(b) allen Dreiecksmatrizen

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K)?$$

(c) allen solchen Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen $b_{11} = b_{22} = 1$?

Aufgabe 9.2 (10 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension $m = \dim_K(V)$ und

$$\begin{aligned} W_1 &:= \{f \in \mathrm{End}_K(V) \mid f|_U = 0\} \\ W_2 &:= \{f \in \mathrm{End}_K(V) \mid \mathrm{im}(f) \subseteq U\} \end{aligned}$$

für einen Untervektorraum $U \subseteq V$ der Dimension $n = \dim_K(U)$. Berechnen Sie die Dimensionen

$$\dim_K(W_1), \ \dim_K(W_2), \ \dim_K(W_1 \cap W_2) \text{ und } \dim_K(W_1 + W_2).$$

Aufgabe 9.3 (10 Punkte). Der *Rang* eines Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist definiert als die Dimension $\mathrm{rk}(f) := \dim_K \mathrm{im}(f)$ seines Bildes. Zeigen Sie, dass für alle Homomorphismen

$$V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \xrightarrow{h} V_4$$

die Ungleichung $\mathrm{rk}(g \circ f) + \mathrm{rk}(h \circ g) \ \leq \ \mathrm{rk}(h \circ g \circ f) + \mathrm{rk}(g)$ gilt.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 9.4 (keine Abgabe). Betrachten Sie die reellen Vektorräume

$$\begin{aligned} V &:= \{P(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(P(x)) \leq 3\} \quad \text{mit der Basis} \quad \mathcal{A} = (1, x, x^2, x^3), \\ W &:= \{P(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(P(x)) \leq 2\} \quad \text{mit der Basis} \quad \mathcal{B} = (1, x, x^2). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie

(a) die Abbildungsmatrix $D = M_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(f)$ für $f : V \longrightarrow W, P(x) \mapsto \frac{d}{dx}P(x)$.

(b) alle Matrizen $M \in \mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R})$ mit $D \cdot M = \mathbf{1}$. Wie sieht jeweils $M \cdot D$ aus?

Aufgabe 9.5 (keine Abgabe). Sei $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit einer Primzahl p, und

$$U := \left\{ (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F}_p) \;\middle|\; a_{ij} = 0 \text{ für alle } i < j, \text{ und } a_{ii} = 1 \text{ für alle } i \right\}$$

die Menge aller unteren Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale.

(a) Zeigen Sie, dass $U \subseteq Gl_n(\mathbb{F}_p)$ eine Untergruppe ist.

(b) Wieviele Elemente enthält die Untergruppe U?

(c) Wieviele Elemente enthält die Gruppe $Gl_n(\mathbb{F}_p)$?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 10.1 (10 Punkte).

(a) Bestimmen Sie Basen von $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$ für die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y).$$

(b) Finden Sie abhängig von $\beta \in \mathbb{R}$ alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^5$ des LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(4 \times 5, \mathbb{R}), \qquad b = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.2 (10 Punkte). Sei $V = \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $C \in \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $m_C : V \to V, A \mapsto C \cdot A$ linear ist.

(b) Berechnen Sie den Rang $\operatorname{rk}(m_C) = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im}(m_C))$ in Abhängigkeit von $\operatorname{rk}(C)$.

(c) Zeigen Sie

$$V = \operatorname{im}(m_C) \oplus \ker(m_C) \quad \text{für} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.3 (10 Punkte). Sei V ein K-Vektorraum, und es seien $P, Q \in \operatorname{End}_K(V)$ zwei Projektoren. Zeigen Sie:

(a) Es ist $\mathrm{id}_V - P$ ein Projektor mit $\ker(P) = \operatorname{im}(\mathrm{id}_V - P)$.

(b) Im Fall $Q \circ P = P \circ Q$ sind auch $P \circ Q$ und $R = P + Q - P \circ Q$ Projektoren mit

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(P \circ Q) &= \operatorname{im}(P) \cap \operatorname{im}(Q), & \operatorname{im}(R) &= \operatorname{im}(P) + \operatorname{im}(Q), \\ \ker(P \circ Q) &= \ker(P) + \ker(Q), & \ker(R) &= \ker(P) \cap \ker(Q). \end{aligned}$$

Zur Erinnerung. Wir nennen $P \in \operatorname{End}_K(V)$ einen *Projektor*, wenn $P \circ P = P$ ist.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 10.4 (keine Abgabe). Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$. Zeigen Sie:

(a) Im Fall $\mathrm{rk}(A) = 1$ gilt $A = v \cdot w$ für einen geeigneten

- Spaltenvektor $v \in \mathrm{Mat}(m \times 1, K)$,
- Zeilenvektor $w \in \mathrm{Mat}(1 \times n, K)$.

(b) Für $r = \mathrm{rk}(A)$ beliebig hat man eine Darstellung

$$A = v_1 \cdot w_1 + \cdots + v_r \cdot w_r$$

für geeignete $v_i \in \mathrm{Mat}(m \times 1, K)$, $w_i \in \mathrm{Mat}(1 \times n, K)$.

Aufgabe 10.5 (keine Abgabe). Zeigen Sie:

(a) Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $\ker(\varphi) \subseteq (R, +)$ der Kern des zugrundeliegenden Homomorphismus von additiven Gruppen. Dann ist für alle $a \in \ker(\varphi)$, $b \in R$ auch $a \cdot b \in \ker(\varphi)$, $b \cdot a \in \ker(\varphi)$.

(b) Sei $\mathcal{I} \subseteq \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine additive Untergruppe mit

$$A \cdot B \in \mathcal{I} \quad \text{und} \quad B \cdot A \in \mathcal{I}$$

für alle $A \in \mathcal{I}$, $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$, dann gilt $\mathcal{I} = \{0\}$ oder $\mathcal{I} = \mathrm{Mat}(n \times n, K)$.

(c) Was folgt daraus über Ringhomomorphismen $\varphi : \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to S$?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 11.1 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 13 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in Gl_4(\mathbb{Q})$$

ist, und berechnen Sie die dazu inverse Matrix. Für welche Primzahlen p ist die Matrix $\overline{A} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{F}_p)$, die man aus A durch Reduktion der Einträge modulo p bekommt, invertierbar?

(b) Sei $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$, und sei p eine Primzahl, sodass die durch Reduktion der Matrixeinträge modulo p erhaltene Matrix $\overline{B} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{F}_p)$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann $B \in Gl_n(\mathbb{Q})$ ist.

Aufgabe 11.2 (10 Punkte). Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch Multiplikation mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

(a) eine Basis und ein LGS für den Untervektorraum $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$,

(b) eine Basis und ein LGS für den Untervektorraum $\ker(f) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(c) eine Zerlegung $f = g \circ h$ in einen

- Epimorphismus $h : \mathbb{R}^4 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^r$ und einen
- Monomorphismus $g : \mathbb{R}^r \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ für geeignetes $r \in \mathbb{N}$,

wobei g, h durch Abbildungsmatrizen in den Standardbasen anzugeben sind.

Aufgabe 11.3 (10 Punkte). Sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_7.$$

Bestimmen Sie

(a) die Anzahl der Fehlstände von σ und das Signum $sgn(\sigma)$,

(b) die Zerlegung von σ als Produkt paarweise disjunkter Zykel,

(c) eine Zerlegung von σ als Produkt von Transpositionen.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 11.4 (keine Abgabe). Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$. Zeigen Sie:

(a) Die reduzierte Zeilenstufenform von A ist eindeutig: Sind $S_1, S_2 \in Gl_m(K)$ zwei invertierbare Matrizen, sodass die Matrizen $S_i A$ für $i = 1, 2$ in reduzierter Zeilenstufenform sind, dann gilt

$$S_1 A \;=\; S_2 A.$$

(b) Man kann $S_2 \neq S_1$ wählen genau dann, wenn $\mathrm{rk}(A) < m$ ist.

Aufgabe 11.5 (keine Abgabe). Zeigen Sie:

(a) Jede Permutation lässt sich in bis auf die Reihenfolge eindeutiger Weise als Produkt von paarweise disjunkten Zykeln schreiben.

(b) Der einzige Normalteiler $H \trianglelefteq \mathfrak{S}_d$, der eine Transposition enthält, ist $H = \mathfrak{S}_d$.

(c) Eine Menge $S \subseteq \mathfrak{S}_n$ von Transpositionen erzeugt die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ genau dann, wenn der entsprechende Graph Γ_S zusammenhängend ist. Dabei sei Γ_S der Graph mit den

- Ecken $1, \ldots, n$,
- Kanten zwischen i und j genau für die Transpositionen $(ij) \in S$.

Wieviele Transpositionen sind nötig, um die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ zu erzeugen?

(d) Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ wird erzeugt von 3-Zykeln.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 12.1 (10 Punkte).

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

(b) Für welche $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ ist B invertierbar mit $B^{-1} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{Z})$?

Aufgabe 12.2 (10 Punkte). Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, K)$$

alle Eigenwerte $\lambda \in K$ und Eigenräume $\ker(A - \lambda \mathbf{1}) \subseteq K^3$ über folgenden Körpern:

(a) $K = \mathbb{R}$,

(b) $K = \mathbb{C}$,

(c) $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 12.3 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(2 \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times 2, K)$.

(a) Zeigen Sie $\det(BA) = 0$ für $n > 2$.

(b) Geben Sie für $n = 3$ ein Beispiel mit $\det(AB) \neq \det(BA)$.

(c) Beweisen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq i < k \leq n} \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2k} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} \\ b_{k1} & b_{k2} \end{pmatrix}.$$

Hint: Reduzieren Sie per Multilinearität auf den Fall sehr einfacher Matrizen.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 12.4 (keine Abgabe).

(a) Für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ der Binomialkoeffizienten

$$a_{ij} \;:=\; \binom{x_j}{i-1} \quad \text{für} \quad i, j \;\in\; \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Zeigen Sie

$$\det(A) \quad = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{x_j - x_i}{j - i}.$$

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}(n \times n, K).$$

Aufgabe 12.5 (keine Abgabe).

(a) Wir sagen, dass $A, B \in Gl_n(\mathbb{R})$ sich *stetig ineinander deformieren* lassen, wenn es stetige Funktionen

$$a_{ij} : \quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{für} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

gibt mit

- $A = (a_{ij}(0))$ und $B = (a_{ij}(1))$,
- $(a_{ij}(t)) \in Gl_n(\mathbb{R})$ für alle $t \in [0,1]$.

Zeigen Sie, dass A und B sich genau dann stetig ineinander deformieren lassen, wenn ihre Determinanten $\det(A)$ und $\det(B)$ gleiches Vorzeichen haben.

(b) Was bedeutet diese Aussage im Fall $n \in \{2, 3\}$ anschaulich für das von den Spalten einer Matrix aufgespannte Parallelogramm bzw. Parallelotop?

(c) Was ändert sich, wenn Sie stattdessen $Gl_n(\mathbb{C})$ betrachten?

Dieses zusätzliche Übungsblatt dient als Wiederholung und Training. Die Aufgaben müssen nicht schriftlich abgegeben werden.

Aufgabe 13.1.

(a) Welche der folgenden Gruppen sind zueinander isomorph?

$$G_1 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad G_3 = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times, \quad G_4 = \mathfrak{S}_3.$$

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $z^2 + (4-i)z + (5+i) = 0$.

(c) Finden Sie Polynome $q, r \in \mathbb{F}_{11}[x]$ über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ mit

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 \ = \ q \cdot (2x^3 + 1) + r \quad \text{und} \quad \deg(r) \ < \ 3.$$

Die Lösung ist durch Polynome mit Koeffizienten in $\{0, 1, \ldots, 10\}$ anzugeben.

Aufgabe 13.2. Es sei V der reelle Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume?

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{f \in V \mid \lim_{n\to\infty} f(n) = 0\}, \\
U_2 &= \{f \in V \mid \lim_{n\to\infty} f(n) = 1\}, \\
U_3 &= \{f \in V \mid \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : f(n+k) = f(n)\}, \\
U_4 &= \{f \in V \mid \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : f(n+k) = f(n)\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.3. Betrachten Sie für $u = (1,1,1,0)$, $v = (1,2,1,1)$, $w = (1,3,1,2) \in \mathbb{R}^4$ die lineare Hülle

$$U \ = \ \langle u, v, w \rangle_{\mathbb{R}} \ \subseteq \ \mathbb{R}^4.$$

(a) Ist $U = \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle$? Ist $U = \langle u, v \rangle \oplus \langle w \rangle$? Ist $U = \langle u \rangle \oplus \langle v \rangle \oplus \langle w \rangle$?

(b) Bestimmen Sie einen Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Aufgabe 13.4. Jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass dabei gilt: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2\dim_{\mathbb{C}}(V)$.

(b) Bilden für $V = \mathbb{C}^2$ die drei Vektoren $(i, 1-i), (i, 1+i), (i, 2) \in V$ ein

i) linear unabhängiges System
ii) Erzeugendensystem des Vektorraums V

über dem Körper $K = \mathbb{C}$? Wie sieht es über dem Körper $K = \mathbb{R}$ aus?

Aufgabe 13.5. Sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass für $v_1, \ldots, v_n \in V$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Vektoren $u_i := v_i - v_n$ mit $1 \leq i < n$ sind linear unabhängig.

(b) Die Vektoren $w_i := v_i - v_1$ mit $1 < i \leq n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 13.6. Sei K ein Körper und $f : V \longrightarrow W$ ein injektiver Homomorphismus zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{A} \ := \ \{ \, g \in \mathrm{Hom}_K(W, V) \mid g \circ f = \mathrm{id}_V \, \}$$

ein affiner Unterraum von $\mathrm{Hom}_K(W, V)$ ist, und berechnen Sie $\dim_K(\mathbb{A})$.

Aufgabe 13.7. Sei

$$A \ = \ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -5 & 4 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Rang $\mathrm{rk}(A)$ und die Dimension $\dim(\ker(A))$.

(b) Finden Sie eine Basis von $\mathrm{im}(A)$ und ergänzen Sie sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 13.8. Auf $V = \mathbb{R}^3$ seien Linearformen $f, g, h \in V^*$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ := \ x + y - 2z, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ := \ x - 2y + z, \quad h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ := \ 4x - 2y - 2z.$$

(a) Sind diese drei Linearformen linear unabhängig?

(b) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\beta : \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} f(v) \\ g(v) \\ h(v) \end{pmatrix}.$$

Finden Sie $d, e \in \mathbb{N}_0$ und lineare Abbildungen α, γ, sodass folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^d \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\ \beta\ } \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\ \gamma\ } \mathbb{R}^e \longrightarrow 0$$

Aufgabe 13.9.

(a) Bestimmen Sie alle Potenzen der reellen Matrizen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei K ein Körper. Finden Sie ein Polynom $f \in K[t]$, sodass

$$\varphi_f : \quad K \longrightarrow \mathrm{Mat}(3 \times 3, K), \quad x \mapsto \varphi_f(x) := \begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einen Gruppenhomomorphismus $\varphi_f : (K, +) \longrightarrow Gl_3(K)$ definiert.

Zusatzfrage: Können Sie *sämtliche* solche Polynome $f \in K[t]$ beschreiben? Schauen Sie dazu $f(t+1) - f(t)$ an; die Antwort hängt ab von $\mathrm{char}(K)$.

Aufgabe 13.10.

(a) Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus das Inverse von 2 und von 44 in dem endlichen Körper $\mathbb{F}_{97} = \mathbb{Z}/97\,\mathbb{Z}$.

(b) Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -10 & 34 & 3 \\ -12 & 32 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{F}_{97}).$$

Die Lösung ist durch Polynome mit Koeffizienten in $\{0, 1, \ldots, 96\}$ anzugeben.

Aufgabe 13.11.

(a) Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K), \;\; B \in \mathrm{Mat}(n \times m, K).$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$ mit den Einträgen

$$a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{für } i = j, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 13.12. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Finden Sie ein $S \in Gl_2(\mathbb{R})$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Verwenden Sie Ihr Resultat, um die Matrix $A^{10} = A \cdot A \cdots A$ zu berechnen.

Aufgabe 13.13. Sei K ein Körper.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ -14 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, K).$$

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A über $K = \mathbb{C}$ und über $K = \mathbb{F}_p$ für $p \in \{2, 3, 5\}$. Über welchen dieser Körper ist die Matrix diagonalisierbar?