Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 1.1 (10 Punkte).

(a) Betrachten Sie die komplexe Ebene $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ als reellen Vektorraum mit der Basis $\mathcal{B} = (1, i)$. Finden Sie für diese Basis die Abbildungsmatrizen zu den linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto (1+i)\cdot z, \\ g: \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \tfrac{i}{2}\cdot(z+\overline{z}), \end{aligned}$$

und fertigen Sie dazu jeweils eine Skizze in der Ebene an.

(b) Zeigen Sie, dass folgende Abbildung ein Isomorphismus reeller Vektorräume ist:

$$\varphi: \quad \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C}), \quad (a,b) \mapsto (z \mapsto az + b\overline{z})$$

Aufgabe 1.2 (10 Punkte).

(a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \in Gl_4(\mathbb{R}).$$

(b) Finden Sie ein Polynom $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ mit $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 7$.

Aufgabe 1.3 (10 Punkte).

(a) Sei K ein Körper und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(2\times 2, K)$. Zeigen Sie, dass

$$f: \quad \mathrm{Mat}(2\times 2, K) \longrightarrow \mathrm{Mat}(2\times 2, K), \quad B \mapsto A\cdot B$$

eine K-lineare Abbildung ist, und finden Sie ihre Abbildungsmatrix zur Basis bestehend aus

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie für die charakteristischen Polynome, dass $\chi_f(t) = (\chi_A(t))^2$ ist.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 1.4 (keine Abgabe).

(a) Sei K ein Körper. Erklären Sie *ohne Rechnen*, warum für beliebige $a_{ij} \in K$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

(b) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$ eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \{\pm 1\}$. Zeigen Sie, dass die Determinante $\det(A)$ eine durch 2^{n-1} teilbare ganze Zahl ist.

Aufgabe 1.5 (keine Abgabe).

(a) Wir betrachten ein Spiel aus einem 4×4 Quadrat, auf dessen Feldern 15 Plättchen befestigt sind, die man lediglich horizontal oder vertikal auf das je angrenzende Feld verschieben kann, falls dieses Feld nicht von einem anderen Plättchen belegt ist. Andere Bewegungen sind nicht erlaubt. Ist es möglich, von der ersten unten abgebildeten Konfiguration zur zweiten zu gelangen?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

(b) Können Sie allgemeiner sämtliche Konfigurationen beschreiben, die ausgehend von einer gegebenen Konfiguration erreichbar sind? Numerieren Sie dazu die Startkonfiguration wie folgt um:

9	10	13	14
8	11	12	15
7	4	3	1
6	5	2	

Sie dürfen zunächst ohne Beweis benutzen, dass die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_{15}$ erzeugt wird von den beiden Zykeln

$$(1, 2, 3) \quad \text{und} \quad (1, 2, \ldots, 15).$$

(c) Zusatzaufgabe: Beweisen Sie die obige Aussage über die alternierende Gruppe!

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 2.1 (10 Punkte).

(a) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V aller Folgen $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen mit

$$v_{k+1} \;=\; 2v_k + v_{k-1} - 2v_{k-2} \quad \text{für alle} \quad k \;\geq\; 2.$$

(b) Für welche Anfangswerte $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt?

Aufgabe 2.2 (10 Punkte).

(a) Bestimmen Sie für die folgenden zwei Matrizen jeweils ihr charakteristisches Polynom und ihr Minimalpolynom:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathrm{Mat}(4\times 4, \mathbb{R}).$$

(b) Sind diese beiden Matrizen zueinander ähnlich?

Aufgabe 2.3 (10 Punkte).

(a) Seien I, J Ideale in einem Ring R. Zeigen Sie, dass dann auch folgende drei Teilmengen Ideale sind:

$$I \cap J, \quad I + J := \big\{a + b \mid a \in I, b \in J\big\}, \quad I \cdot J := \big\{\textstyle\sum_{i=1}^n a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\big\}.$$

(b) Finden Sie einen Erzeuger dieser Ideale im Fall $R = \mathbb{Z}$, $I = a\mathbb{Z}$, $J = b\mathbb{Z}$.

(c) Ideale I, J in einem kommutativen Ring R heißen *teilerfremd*, wenn $I + J = R$ gilt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$I \cdot J = I \cap J$$

Freiwillige Zusatzaufgabe: Was passiert für nicht kommutative Ringe? Denken Sie z.B. an einen Ring $R \subset \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$ von unteren Dreiecksmatrizen...

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 2.4 (keine Abgabe).

(a) In der Vorlesung haben wir Polynome über einem Körper K formal eingeführt als *endliche* Folgen von Koeffizienten. Zeigen Sie, dass analog die Menge aller Folgen

$$K[[t]] \ := \ \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \mid a_i \in K\}$$

einen kommutativen Ring bildet mit der Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{aligned} (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \quad &:= \quad (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, \\ (a_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \quad &:= \quad (a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \cdots + a_0 b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \end{aligned}$$

Wir nennen $K[[t]]$ den Ring der *formalen Potenzreihen* über K und schreiben suggestiv

$$\sum_{i\geq 0} a_i t^i \ = \ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

statt $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ (wobei die Reihe als rein formale Notation zu verstehen ist).

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $K[[t]]^\times$ des Potenzreihenrings $K[[t]]$.

(c) Zeigen Sie, dass jede von Null verschiedene formale Potenzreihe $f \in K[[t]]\backslash\{0\}$ die Form

$$f = u \cdot t^n$$

für eine Einheit $u \in K[[t]]^\times$ und ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}_0$ hat.

(d) Folgern Sie, dass $K[[t]]$ ein Hauptidealring ist. Was sind seine Primelemente?

Aufgabe 2.5 (keine Abgabe). Zeigen Sie:

(a) Ist $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums über einem Körper K und sind die Potenzen $\mathrm{id}, f, f^2, \ldots, f^k \in \mathrm{End}_K(V)$ linear unabhängig, dann ist $\deg \mu_f(t) \geq k$.

(b) Wenn f invertierbar ist, lässt sich f^{-1} als Polynom in f darstellen.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 3.1 (10 Punkte).

(a) Was sagt der Satz von Cayley-Hamilton für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})?$$

(b) Benutzen Sie dies, um die Matrixpotenz $A^{12} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ zu bestimmen, ohne dabei ein einziges Matrizenprodukt von Hand zu berechnen.

***

Notation. In den folgenden beiden Aufgaben sei ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über einem Körper K gegeben. Ein Unterraum $U \subseteq V$ heißt *f-invariant*, wenn $f(U) \subseteq U$ ist. Wie in der Vorlesung seien dann mit

$$f_U \in \mathrm{End}_K(U) \quad \text{und} \quad f_{V/U} \in \mathrm{End}_K(V/U)$$

die von f induzierten Endomorphismen bezeichnet.

Aufgabe 3.2 (10 Punkte). Sei $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum. Zeigen Sie:

(a) Für die charakteristischen Polynome gilt $\chi_f(t) = \chi_{f_U}(t) \cdot \chi_{f_{V/U}}(t)$.

(b) Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ ist

$$\dim\ker\big(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V\big) \;\leq\; \dim\ker\big(f_U - \lambda \cdot \mathrm{id}_U\big) \;+\; \dim\ker\big(f_W - \lambda \cdot \mathrm{id}_W\big).$$

(c) Wenn f diagonalisierbar ist, so sind auch die Endomorphismen f_U und $f_{V/U}$ diagonalisierbar. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

Aufgabe 3.3 (10 Punkte). Zeigen Sie:

(a) Wenn f diagonalisierbar ist, dann existiert für jeden beliebigen f-invarianten Unterraum $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum $U' \subseteq V$ mit

$$V = U \oplus U'$$

(b) Ist K algebraisch abgeschlossen, so gilt auch die Umkehrung dieser Aussage.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 3.4 (keine Abgabe).

(a) Verifizieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton durch explizite Rechnung für Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, K).$$

(b) Geben Sie einen von der Vorlesung unabhängigen direkten Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton im Spezialfall von diagonalisierbaren Matrizen.

Aufgabe 3.5 (keine Abgabe). Sei $A \in Gl_n(K)$ eine invertierbare Matrix. Die aus dieser Matrix durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhaltene Matrix bezeichnen wir mit

$$A_{ij} \in \mathrm{Mat}\big((n-1) \times (n-1), K\big).$$

Zeigen Sie, dass für die Matrix $A^* = (a^*_{ij})$ mit den Einträgen $a^*_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$ gilt:

$$A^* = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k A^{k-1}$$

wobei c_k die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\chi_A(t) = \sum_k c_k t^k$ seien.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 4.1 (10 Punkte).

(a) Finden Sie die Elementarteiler der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}).$$

(b) Bestimmen Sie die Länge des $\mathbb{Z}$-Moduls $M = \mathbb{Z}^3/(A \cdot \mathbb{Z}^3)$.

Aufgabe 4.2 (10 Punkte).

(a) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{Z})$ mit Elementarteilern $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$r = \mathrm{rk}(A),$$

d.h. die Anzahl der Elementarteiler ist der Rang von A (als Matrix über $\mathbb{Q}$).

(b) Zeigen Sie: Im Fall $r > 0$ ist

$$d_1 = \mathrm{ggT}\big(a_{ij} \mid i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n \big).$$

Aufgabe 4.3 (10 Punkte). In der Situation der vorigen Aufgabe beschränken wir uns nun der Einfachheit halber auf Matrizen mit nur zwei Zeilen und betrachten eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times n, \mathbb{Z})$$

mit $\mathrm{rk}(A) = 2$. Zeigen Sie, dass für das Produkt ihrer Elementarteiler $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d_1 \cdot d_2 = \mathrm{ggT}\left(\det \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{pmatrix} \;\middle|\; 1 \leq j < k \leq n \right).$$

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 4.4 (keine Abgabe).

(a) Bestimmen Sie die Elementarteiler des Untermoduls

$$\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subseteq \mathbb{Z}^2 \quad \text{für} \quad u = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $c \in \mathbb{Z}$ hat das folgende Gleichungssystem eine ganzzahlige Lösung?

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &= 1 \\ 6x_1 + 4x_2 &= c \end{aligned}$$

(c) Illustrieren Sie Ihr Resultat mit einer Skizze in der Ebene.

Aufgabe 4.5 (keine Abgabe).

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ gegeben mit $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Zeigen Sie, dass es eine Matrix

$$A \in Gl_n(\mathbb{Z})$$

gibt, deren ersten Zeile der gegebene Vektor $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ ist.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 5.1 (10 Punkte).

Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung $n = |G|$. Zeigen Sie:

(a) Für jeden Teiler $d \mid n$ gibt es eine Untergruppe $H \subseteq G$ der Ordnung $|H| = d$.

(b) Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

- Die Gruppe G ist zyklisch.
- Für jeden Teiler $d \mid n$ gibt es *genau* eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit $|H| = d$.

Aufgabe 5.2 (10 Punkte).

(a) Geben Sie den Exponent der Gruppen $G_1 = \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ an, und berechnen Sie den Kern von

$$\varphi_n : \quad G_i \longrightarrow G_i, \quad x \mapsto nx$$

für alle Primzahlpotenzen $n = p^e \in \mathbb{N}$ und für $i = 1, 2$.

(b) Finden Sie das Minimalpolynom der Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, K),$$

und berechnen Sie $\ker(p^e(A_i))$ für alle irreduziblen $p \in K[t]$ und alle $e \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5.3 (10 Punkte).

Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Falls $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, gilt auch $f^n = 0$.

(b) Allgemein gilt $\ker(f^d) = \ker(f^{d+1})$ für alle $d \geq n$. Tipp: Wenden Sie (a) an auf den Unterraum

$$V' := \left\langle v, f(v), f^2(v), \ldots, f^d(v) \right\rangle \subseteq V \quad \text{für} \quad v \in \ker(f^{d+1}).$$

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 5.4 (keine Abgabe). Sei $(G, +)$ eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Sind $H_1, H_2 \subseteq G$ zyklische Untergruppen, dann ist die von ihnen erzeugte Untergruppe

$$H_1 + H_2 \subseteq G$$

im Fall $\mathrm{ggT}(|H_1|, |H_2|) = 1$ ebenfalls eine zyklische Gruppe.

(b) Bleibt dies auch richtig, wenn die Gruppenordnungen nicht teilerfremd sind?

Aufgabe 5.5 (keine Abgabe).

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Berechnen Sie den Kern $\ker(A - \lambda\mathbf{1})^e$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $e \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie einen Basiswechsel $S \in Gl_3(\mathbb{R})$, sodass die Matrix SAS^{-1} eine Blockdiagonalmatrix mit möglichst kleinen Blöcken wird!

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 6.1 (10 Punkte). Gegeben seien die Polynome

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^2+1, \\ p_2(t) &= t^3-t^2+t-1, \\ p_3(t) &= t^4+2t+1. \end{aligned}$$

Für welche $i, j \in \{1,2,3\}$ existiert eine reelle Matrix A mit

- Minimalpolynom $\mu_A(t) = p_i(t)$, und
- charakteristischem Polynom $\chi_A(t) = p_j(t)$?

Geben Sie im Fall der Existenz jeweils ein Beispiel einer solchen Matrix an.

Aufgabe 6.2 (10 Punkte). Sei K ein Körper.

(a) Wie sehen für Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2, K)$ die möglichen verallgemeinerten Jordan-Normalformen aus?

(b) Zeigen Sie, dass für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(2\times 2, K)$, die nicht skalare Vielfache der Einheitsmatrix sind, gilt:

$$A \text{ und } B \text{ sind zueinander ähnlich} \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_A(t) \;=\; \chi_B(t)$$

(c) Finden Sie ein vollständiges Repräsentantensystem für die Ähnlichkeitsklassen von Matrizen in $\mathrm{Mat}(2\times 2, K)$ über dem Körper $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6.3 (10 Punkte). Für $p \in K[t]$ irreduzibel und $e \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Begleitmatrix

$$A \;=\; C(p^e) \;\in\; \mathrm{Mat}(n\times n, K), \quad n \;=\; e\cdot \deg(p).$$

Zeigen Sie, dass für $q \in K[t]$ gilt:

(a) Im Fall $p \nmid q$ ist die Matrix $q(A)$ invertierbar.

(b) Allgemein sei $k \in \mathbb{N}_0$ maximal mit $p^k \mid q$, dann gilt

$$\dim_K \ker q(A) \;=\; \min\{k, e\}\cdot \deg(p).$$

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 6.4 (keine Abgabe). Zeigen Sie, dass für $A, B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ äquivalent sind:

(a) A und B sind ähnlich.

(b) Es ist $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$.

Aufgabe 6.5 (keine Abgabe). Sei $A \in \mathrm{Mat}(7 \times 7, \mathbb{R})$ mit

$$\chi_A(t) \;=\; (t^2+1)^2(t-2)(t^2-1) \;\in\; \mathbb{R}[t].$$

Welche Gestalt kann die verallgemeinerte Jordan-Normalform von A haben?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 7.1 (10 Punkte). Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathrm{Mat}(5 \times 5, \mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie

(a) eine Basis, in der A Jordan-Normalform annimmt.

(b) die Jordan-Normalform von B (mit möglichst wenig Rechenaufwand).

Aufgabe 7.2 (10 Punkte). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$V = \{p \in \mathbb{C}[t] \mid \deg(p) \leq n\} \subset \mathbb{C}[t].$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $(f(p))(t) := p(t+1)$.

Aufgabe 7.3 (10 Punkte).

(a) Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ zwei *nilpotente* Matrizen, d.h. es gebe $r, s \in \mathbb{N}$ mit

$$A^r = B^s = 0.$$

Zeigen Sie:

- Wenn $AB = BA$ ist, sind auch die Matrizen $A + B$ und AB nilpotent.
- Für Matrizen mit $AB \neq BA$ gilt diese Aussage im Allgemeinen nicht.

(b) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, R)$ gegeben mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \leq j$. Berechnen Sie

$$A^{n-1} \in \mathrm{Mat}(n \times n, R).$$

Wegen der am Pfingstmontag und am Dies Academicus entfallenden Übungsgruppen gibt es diesmal keine Zusatzaufgaben auf der Rückseite.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 8.1 (10 Punkte). Finden Sie alle differenzierbaren $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1' &= f_2 + 2f_3 \\ f_2' &= f_1 + f_2 + 3f_3 \\ f_3' &= -f_1 - f_3 \end{aligned}$$

erfüllen und die zudem der Randbedingung $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 1$ genügen.

Aufgabe 8.2 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie

$$\dim_{\mathbb{C}}(Z(A)) \geq n \quad \text{für} \quad Z(A) := \big\{B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid AB = BA\big\}.$$

Aufgabe 8.3 (10 Punkte).

(a) Berechnen Sie $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

(b) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.

- Zeigen Sie: Im Fall $AB = BA$ gilt $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
- Finden Sie $A, B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ mit $\exp(A + B) \neq \exp(A)\exp(B)$.

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 8.4 (keine Abgabe).

(a) Zeigen Sie: Wenn eine Potenz A^m einer invertierbaren Matrix $A \in Gl_n(\mathbb{C})$ über den komplexen Zahlen diagonalisierbar ist, dann ist auch die gegebene Matrix A über den komplexen Zahlen diagonalisierbar.

(b) Gilt dies Aussage auch für reelle Matrizen und Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{R}$?

Aufgabe 8.5 (keine Abgabe). Gibt es $A, B \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{C})$ mit

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^5 + 5B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}?$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 9.1 (10 Punkte). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit

$$\mathrm{Gram}_{\mathcal{A}} \langle \cdot, \cdot \rangle \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

für eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$. Ist die Bilinearform positiv definit?

(b) Zeigen Sie, dass auch $\mathcal{B} := (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_2)$ eine Basis von V ist, und finden Sie die Gram-Matrix der Bilinearform in dieser neuen Basis.

Aufgabe 9.2 (10 Punkte). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass für symmetrische Bilinearformen $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ äquivalent sind:

- Die Bilinearform ist (positiv oder negativ) semidefinit.
- Für jedes $u \in V$ mit $\langle u, u \rangle = 0$ gilt sogar $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $v \in V$.
- Die Teilmenge $U := \{u \in V \mid \langle u, u \rangle = 0\} \subseteq V$ ist ein Untervektorraum.

(b) Sei nun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv semidefinit. Sei $U \subseteq V$ wie oben definiert. Folgern Sie, dass

$$V/U \times V/U \;\longrightarrow\; \mathbb{R}, \quad ([v_1], [v_2]) \;\mapsto\; \langle v_1, v_2 \rangle$$

ein wohldefinierte positiv definite symmetrische Bilinearform auf V/U ist.

(c) Bestimmen Sie den oben definierten Untervektorraum $U \subseteq V$ in dem Fall, dassn V der Vektorraum der stückweise stetigen[1] Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist mit der Bilinearform

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Aufgabe 9.3 (10 Punkte). Zeigen Sie:

(a) Wenn V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum ist, dann gibt es für jeden von Null verschiedenen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \setminus \{0\}$ ein $v \in V$ mit

$$\big\langle f(v), v \big\rangle \;\neq\; 0.$$

(b) Gilt die analoge Aussage auch für Euklidische Vektorräume?

[1] Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig*, wenn sie in höchstens endlich vielen Punkten des Einheitsintervalls unstetig ist.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden; wir bezeichnen hier mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 9.4 (keine Abgabe). Zeigen Sie:

(a) Für affine Geraden $L = u + \mathbb{R}v \subset \mathbb{R}^n$ und Vektoren $w \in \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- Es ist $\langle w, v \rangle = 0$.
- Es ist $\langle w, x_1 - x_2 \rangle = 0$ für alle Vektoren $x_1, x_2 \in L$.

Wenn diese Bedingungen gelten, schreiben wir auch kurz $w \perp L$.

(b) Für $n = 2$ und $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\} \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt $(a, b) \perp L$.

Aufgabe 9.5 (keine Abgabe). Zeigen Sie:

(a) Ist $L \subset \mathbb{R}^n$ eine affine Gerade, dann existiert zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ ein eindeutiger Vektor $v_L \in L$ mit $(v - v_L) \perp L$. Dieser lässt sich charakterisieren durch

$$\|v - v_L\| \;=\; \min\big\{ \|v - x\| \in \mathbb{R} \mid x \in L \big\}.$$

(b) Das Minimum in der vorigen Aufgabe nennt man auch den *Abstand* von v zur Geraden L. Finden Sie eine Formel für diesen Abstand im Fall $n = 2$ in Abhängigkeit von v und den Parametern a, b, c in

$$L \;=\; \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \big\}.$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 10.1 (10 Punkte).

(a) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren an zur Konstruktion einer Orthonormalbasis von V ausgehend von den Vektoren

$$u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (1,0,1), \quad u_3 = (0,1,1).$$

(b) Sei $V = \mathbb{R}[t]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die Polynome $1, t, t^2$ an, um eine Orthonormalbasis des von diesen aufgespannten Unterraumes zu finden.

Aufgabe 10.2 (10 Punkte). Sei $V = \{ \text{stetige Funktionen } f : [-1,1] \to \mathbb{R} \}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx,$$

und es seien $e_n \in V$ definiert durch $e_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $e_n(x) := \cos(n\pi x)$ für $n > 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Orthonormalsystem in V ist.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n \subseteq V$ der von den Vektoren $e_0, e_1, \ldots, e_n$ aufgespannte Unterraum und

$$p_n : \quad V \longrightarrow U_n := \mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_n$$

sei die Orthogonalprojektion auf diesen Unterraum. Berechnen Sie $p_n(f)$ für die Funktion $f \in V$ definiert durch $f(x) := 1 - |x|$.

(c) Plotten Sie die Funktionen f und $p_n(f)$ für $n = 1, 3, 5$ mit einem Computer.

Aufgabe 10.3 (10 Punkte). Sei $V = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Auf V ist durch $\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(A \cdot B)$ eine symmetrische Bilinearform gegeben.

(b) Für die Orthokomplemente der Unterräume $U_\pm := \{A \in V \mid A^{\mathsf{t}} = \pm A\} \subseteq V$ gilt

$$U_+^\perp = U_- \quad \text{und} \quad U_-^\perp = U_+.$$

(c) Es ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit auf U_+ und negativ definit auf U_-.

Zur Erinnerung: Die *Spur* einer Matrix $A = (a_{ij})$ ist definiert als $\mathrm{tr}(A) := \sum_i a_{ii}$.

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 10.4 (keine Abgabe). Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ äquivalent sind:

(a) Die Sesquilinearform $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (u, v) \mapsto \overline{u}^{\mathsf{t}} \cdot A \cdot v$ ist ein Skalarprodukt.

(b) Es ist $A = B^{\dagger} \cdot B$ für eine invertierbare Matrix $B \in Gl_n(\mathbb{C})$.

Aufgabe 10.5 (keine Abgabe). Sei V ein endlich-dimensionaler reeller oder komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : \quad V \times V \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Zeigen Sie, dass es dann für jedes weitere Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ einen Automorphismus $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$ gibt mit

$$\langle u, v \rangle_2 \;=\; \langle f(u), f(v) \rangle_1 \quad \text{für alle} \quad u, v \in V.$$

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 11.1 (10 Punkte). Gegeben sei eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass

$$A \ := \ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & B \\ B^\dagger & \mathbf{1} \end{pmatrix} \ \in \ \mathrm{Mat}\big((m+n) \times (m+n), \mathbb{C}\big)$$

positiv definit ist genau dann, wenn die Matrix $\mathbf{1} - B^\dagger B$ positiv definit ist.

Aufgabe 11.2 (10 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine nicht notwendig lineare Abbildung mit

$$\|f(x) - f(y)\| \ = \ \|x - y\| \quad \text{für alle} \quad x, y \ \in \ V,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichne. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung f von der Form

$$x \ \mapsto \ f(x) \ = \ A \cdot x + b$$

ist mit $b = f(0)$ und einer eindeutig bestimmten orthogonalen Matrix $A \in O(n)$.

Aufgabe 11.3 (10 Punkte). Seien U, V zwei Euklidische bzw. unitäre Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass $W := U \oplus V$ ein Euklidischer bzw. unitärer Vektorraum ist mit

$$\big\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \big\rangle_W \ := \ \langle u_1, u_2 \rangle_U + \langle v_1, v_2 \rangle_V \quad \text{für} \quad u_i \in U, v_i \in V.$$

(b) Finden Sie die zur Projektionsabbildung $f : W \longrightarrow V,\ (u, v) \mapsto v$ adjungierte Abbildung

$$g : \quad V \ \longrightarrow \ W$$

mit

$$\big\langle v, f(w) \big\rangle_V \ = \ \big\langle g(v), w \big\rangle_W \quad \text{für alle } w \in W,\ v \in V.$$

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 11.4 (keine Abgabe). Unter einer *Permutationsmatrix* verstehen wir eine Matrix

$$A_\sigma := \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(n \times n, \mathbb{R}),$$

deren Spalten durch Anwenden einer Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ auf die Standardbasis entstehen. Zeigen Sie:

(a) Alle Permutationsmatrizen liegen in der orthogonalen Gruppe $O(n)$.

(b) Die Abbildung $\mathfrak{S}_n \to O(n), \sigma \mapsto A_\sigma$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Jede orthogonale Matrix $A = (a_{ij}) \in O(n)$ mit der Eigenschaft $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist eine Permutationsmatrix.

Aufgabe 11.5 (keine Abgabe). Sei V ein Euklidischer Vektorraum.

(a) Sei $v_0 \in V$ ein Vektor der Länge 1. Zeigen Sie, dass

$$f: \quad V \longrightarrow V, \quad v \mapsto v - 2\langle v_0, v \rangle \cdot v_0$$

eine orthogonale Abbildung ist. Was ist die geometrische Bedeutung dieser Abbildung? Was ist ihr charakteristisches Polynom $\chi_f(t) \in \mathbb{R}[t]$?

(b) Sei nun $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$. Zeigen Sie, dass sich die Abbildung $-\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ schreiben lässt als eine Verkettung von Abbildungen des obigen Typs. Wie viele solche Abbildungen sind dazu mindestens notwendig?

Bitte geben Sie Ihre Lösungen in Gruppen von bis zu 4 Personen ab wie auf moodle beschrieben. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 12.1 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Zeigen Sie:

(a) Wenn A positiv semidefinit ist, dann existiert genau eine symmetrische positiv semidefinite Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $B^2 = A$.

(b) Wenn A nicht positiv semidefinit ist, kann es zwar eine Matrix B mit $B^2 = A$ geben, aber eine solche Matrix B kann nicht symmetrisch sein.

Aufgabe 12.2 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Wenn A symmetrisch und nilpotent ist, dann gilt $A = 0$.

(b) Wenn A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist und $A^{\mathsf{t}} = -A$ gilt, dann ist $A = 0$.

Aufgabe 12.3 (10 Punkte). Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Man zeige:

(a) Die Funktion

$$f_A : \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^{\mathsf{t}} \cdot A \cdot x}{\|x\|^2}$$

nimmt ein Maximum bzw. Mininum

$$\begin{aligned} \mu_{\max}(A) &:= \max\{f_A(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \\ \mu_{\min}(A) &:= \min\{f_A(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

an, und diese sind der größte bzw. der kleinste Eigenwert von A.

(b) Ist $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine weitere symmetrische Matrix, dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_{\min}(A + B) &\geq \mu_{\min}(A) + \mu_{\min}(B), \\ \mu_{\max}(A + B) &\leq \mu_{\max}(A) + \mu_{\max}(B). \end{aligned}$$

Zusatzaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind nicht zur schriftlichen Abgabe gedacht, können aber in den Übungsgruppen besprochen werden.

Aufgabe 12.4 (keine Abgabe). Finden Sie für

$$A := \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix $S \in SO(3)$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 12.5 (keine Abgabe). Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, deren Diagonaleinträge gegenüber den übrigen Einträgen groß sind in dem Sinn, dass

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

für alle i gilt. Zeigen Sie, dass dann die Matrix A positiv definit ist.

Dieses freiwillige Zusatzblatt dient zur Wiederholung und braucht nicht abgegeben zu werden. Es kann am Lerntag und in den letzten Vorlesungen besprochen werden.

Aufgabe 13.1.

(a) Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton?

(b) Berechnen Sie A^{25} für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 13.2.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Sind die Matrizen zueinander ähnlich? Finden Sie ihre Jordan-Normalform.

Aufgabe 13.3. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$.

(a) Wenn A, B als komplexe Matrizen diagonalisierbar sind, sind sie dann auch über den reellen Zahlen diagonalisierbar?

(b) Wenn A, B als komplexe Matrizen zueinander ähnlich sind, sind sie dann auch über den reellen Zahlen zueinander ähnlich?

Aufgabe 13.4.

(a) Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

durch einen geeigneten Basiswechsel in Jordan-Normalform.

(b) Finden Sie eine Basis für den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Folgen $v = (v_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen mit

$$v_{k+1} = -v_k + v_{k-1} + v_{k-2} \quad \text{für alle } k \geq 2.$$

Aufgabe 13.5.

(a) Bestimmen Sie die Elementarteiler der Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z}).$$

(b) Lesen Sie hieraus die Länge des $\mathbb{Z}$-Moduls $G = \mathbb{Z}^3/(A \cdot \mathbb{Z}^3)$ ab.

Aufgabe 13.6. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit einem Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) Es gibt ein $v \in V$ mit $V = \left\langle f^i(v) \mid i = 0, 1, 2, \dots \right\rangle_K$.

(b) Das Minimal- ist gleich dem charakteristischen Polynom: $\mu_f(t) = \chi_f(t)$.

Aufgabe 13.7.

(a) Prüfen Sie, ob die folgenden Matrizen positiv/negativ definit/semidefinit oder indefinit sind:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B \;=\; \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad C \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 24 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie *im positiv definiten Fall* eine Orthonormalbasis für das durch die jeweilige Matrix bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^n$ definierte Skalarprodukt.

Aufgabe 13.8. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $S \subset \mathbb{C}$ eine Menge von $n+1$ verschiedenen Punkten.

(a) Zeigen Sie, dass auf dem komplexen Vektorraum $V = \{p \in \mathbb{C}[t] \mid \deg(p) \leq n\}$ durch

$$\langle p, q \rangle \;:=\; \sum_{z \in S} p(z)\, \overline{q(z)}$$

ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert wird.

(b) Berechnen Sie für $n = 2$ und $S = \{0, \pm 1\}$ eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 13.9. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt über den reellen oder komplexen Zahlen $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ gilt $\ker(f) = \ker(f^\dagger \circ f)$.

(b) Falls f normal ist, folgt $\ker(f) = \ker(f^\dagger)$ und $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f^\dagger)$.

(c) Sind $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ beide normal, dann gilt:

$$f \circ g \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g \circ f \;=\; 0$$

Aufgabe 13.10. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt über den reellen oder komplexen Zahlen $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ mit $f^2 = f$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(a) Es ist f selbstadjungiert.

(b) Es ist $\ker(f) \perp \mathrm{im}(f)$.

Tipp: Man zeige, dass $f : V \twoheadrightarrow \mathrm{im}(f)$ im Fall (b) eine Orthogonalprojektion ist...

Aufgabe 13.11. Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ zueinander äquivalent sind:

(a) Der Endomorphismus f ist normal.

(b) Es gibt ein Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ mit $f^\dagger = p(f)$.

Tipp: Für beliebige $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gibt es ein $p \in \mathbb{C}[t]$ mit $p(\lambda_i) = \overline{\lambda}_i$ für alle i...

Aufgabe 13.12.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A^{\mathsf{t}} \cdot A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ für

$$A \;=\; \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 10 & 14 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & -6 & -3 \\ -16 & 2 & 10 \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R}).$$

(b) Finden Sie eine Singulärwertzerlegung

$$A \;=\; SDT$$

mit $S \in O(4), T \in O(3)$ und einer Diagonalmatrix $D \in \mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R})$.