Stochastik Kombibachelor
Wintersemester 2017/18
Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dörte Kreher
Dr. Paulwin Graewe
Dipl.-Math. Sebastian Holtz

6. Aufgabenserie

1. Unter einer Gruppe von 500 Menschen hat jeder einzelne unabhängig von den anderen eine bestimmte Krankheit mit Wahrscheinlichkeit 10^{-3}. Für einen Schnelltest wird jedem Blut entnommen und dann werden alle Proben zusammengemischt und getestet.

   (a) Berechnen Sie die approximierte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test positiv ist, d. h. dass mindestens eine Person erkrankt ist. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Wahrscheinlichkeit.

   (b) Angenommen der Test ist positiv. Wie hoch ist die exakte und die approximierte Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 3 Personen erkrankt sind? (4 Pkt.)

2. Ein Münze wird solange wiederholt geworfen, bis das erste Mal Zahl erscheint. Ist das beim n-ten Wurf der Fall, erhält er 2^n Euro.

   (a) Wie hoch muss der Einsatz des Spielers sein, wenn das Spiel gerecht sein soll?

   (b) Wie oft wird die Münze bei diesem Spiel im Mittel geworfen?

   (c) Wie hoch muss der Einsatz des Spielers sein, wenn das Spiel spätestens beim 10. Wurf mit der Auszahlung von 2^{10} Euro abgebrochen wird? (3 Pkt.)

3. Ein Nachtwächter hat einen Schlüsselbund mit 10 ähnlich aussehenden Schlüsseln. Wenn er eine bestimmte Tür aufschließen will, in deren Schloss genau einer der 10 Schlüssel passt, so probiert er entweder die Schlüssel nacheinander durch – d. h. kein Schlüssel wird zweimal ausprobiert – bis er den passenden findet (Methode A). Bei einer anderen Methode (B) probiert er einen zufällig ausgewählten Schlüssel, und wenn er nicht passt, so schüttelt er den Schlüsselbund und probiert wieder einen zufällig ausgewählten Schlüssel usw.

   (a) Die Anzahl der Versuche, die nach Methode A bzw. B nötig sind, um den passenden Schlüssel zu finden, wird durch die Zufallsvariable X_A bzw. X_B beschrieben. Man gebe die Verteilung dieser beiden Zufallsvariablen an.

   (b) Der Nachtwächter benutzt Methode A, wenn er nüchtern ist, und Methode B wenn er betrunken ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er in einer bestimmten Nacht betrunken ist, betrage $\frac{1}{3}$. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Betriebsleiter den Nachtwächter der Trunkenheit im Dienst zu recht bezichtigt, nachdem er gesehen hat, dass dieser schon 8-mal erfolglos versucht hat, die Tür zu öffnen? (4 Pkt.)

4. (a) Es sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable zu den Parameter (n, p). Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

(b) Es sei Y eine geometrisch verteilte Zufallsvariable zum Parameter $p \in (0,1)$. Ziegen Sie:

$$\mathbb{P}(Y = n+k \,|\, Y > n) = \mathbb{P}(Y = k), \qquad n, k \in \mathbb{N}.$$

(c) Es sei Z eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter $\lambda > 0$. Für welches k wird $\mathbb{P}(Z = k)$ maximal? (5 Pkt.)

Abgabe: Montag, 04.12.17, 9:15 Uhr in der Vorlesung.
Bitte schreiben Sie **jede Aufgabe auf ein separates Blatt** und geben Sie auf jedem Blatt Ihren **Namen** und den **Wochentag** Ihrer Übungsgruppe an.