



11. Aufgabenserie

1. Es seien X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und I eine Zufallsvariable, unabhängig von X , mit $\mathbb{P}(I = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(I = 0)$. Weiterhin ist die Zufallsvariable Y definiert durch

$$Y = (-1)^I X = \begin{cases} X & : I = 0 \\ -X & : I = 1 \end{cases}.$$

- (a) Sind X und Y unabhängig und / oder unkorreliert?
(b) Sind I und Y unabhängig und / oder unkorreliert? (2+2 Pkt.)
2. Ein Würfel wird n -mal, $n \geq 3$, geworfen.
- (a) Es bezeichne X_j die im j -ten Wurf erzielte Augenzahl und

$$X = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_j \leq X_{j+1}\}}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$ und $\text{Var}(X)$.

- (b) Es bezeichne Y die Anzahl an geworfenen Einsen und Z die Anzahl an geworfenen Zweien. Berechnen Sie $\text{Cov}(Y, Z)$. (2+2 Pkt.)
3. Es seien X und Y absolutstetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f zum Parameter $\rho \in (-1, 1)$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{2(1-\rho^2)}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- (a) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X und Y . Existiert ein Parameter ρ , für den X und Y unabhängig sind?
(b) Berechnen Sie die bedingte Dichte $f_{X|Y}(x|y)$ von X gegeben Y .
(c) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y . (2+1+1 Pkt.)
4. (a) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Es bezeichne X die Augenzahl des ersten Wurfs und Y die maximale geworfene Augenzahl. Bestimmen Sie die lineare Regression $\hat{Y} = a + bX$ von Y bezüglich X ; d. h. bestimmen Sie die bezüglich der mittleren quadratischen Abweichung optimalen Koeffizienten a und b gemäß der Formel aus der Vorlesung.
(b) Es seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert μ und existierenden Varianzen $\text{Var}(X_1) = \sigma_1^2 > 0$ und $\text{Var}(X_2) = \sigma_2^2 > 0$. Der Wert von μ ist nicht bekannt und soll durch ein gewichtetes Mittel $Z = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$ geschätzt werden. Wie sollte man λ wählen, um die mittlere quadratische Abweichung der Vorhersage Z vom wahren Wert μ zu minimieren? (2+2 Pkt.)

Abgabe: Montag, 22.01.18, 9:15 Uhr in der Vorlesung.

Bitte schreiben Sie **jede Aufgabe auf ein separates Blatt** und geben Sie auf jedem Blatt Ihren **Namen** und den **Wochentag** Ihrer Übungsgruppe an.