Kapitel 6

Bernoullischemata und Irrfahrten

Dieses Kapitel beginnt mit Folgen unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen, die alle nur zwei Werte (zum Beispiel Null oder Eins) annehmen können, sogenannte *Bernoullischemata*. Solche Schemata bilden stochastische Modelle für zahlreiche reale Situationen.

Bernoullischemata sind eng verwandt mit Irrfahrten, die wir als mathematisches Modell des mehrfachen Werfens einer Münze in den Abschnitten 2.5 und 3.3 kennen gelernt haben.

6.1 Bernoullischemata

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \geq 1$ und $p \in (0,1)$.

Definition 6.1 *Es sei $n \geq 2$. Jede Folge $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ von Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit*

1. *$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind voneinander unabhängig,*
2. *$P(X_k = 1) = p, P(X_k = 0) = 1 - p =: q, \quad k = 1, \ldots, n,$*

heißt ein Bernoullischema mit den Parametern n und p. *Wir bezeichnen es mit $BS_n(p)$.*

Ist $X = (X_k, k \geq 1)$ *eine unendliche Folge von Zufallsgrößen mit den Eigenschaften 1. und 2. für alle* $n \geq 2$*, so heißt* $(X_k, k \geq 1)$ *ein* unendliches Bernoullischema mit dem Parameter p. *Wir verwenden dafür die Kurzschreibweise* $BS_\infty(p)$.

Eigenschaft 2. aus Definition 6.1 kann man auch in der Form

$$P(X_k = i) = p^i(1-p)^{1-i}, \quad i \in \{0,1\}, k = 1, \ldots, n \tag{6.1}$$

schreiben.

Für jedes Bernoullischema $BS_n(p)$ ist $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein zufälliger Vektor mit den möglichen Werten

$$x = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n =: E.$$

Der zufällige Vektor X bildet Ω in E ab. Er ist folglich diskret verteilt, und es gilt nach Definition 6.1 und mit (6.1) für jedes $x = (i, \ldots, i_n) \in E$:

$$P(X = x) = P(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} P(X_k = i_k) = p^{\sum\limits_{k=1}^{n} i_k}(1-p)^{n - \sum\limits_{k=1}^{n} i_k}. \tag{6.2}$$

Bemerkung 6.2 Das Bernoullischema $BS_n(p)$ entspricht einem n-stufigen zufälligem Experiment, dessen Einzelexperimente voneinander unabhängig sind und jeweils nur zwei mögliche Versuchsausgänge haben (wir bezeichnen sie mit 0 bzw. 1), die in jedem Teilexperiment mit der Wahrscheinlichkeit q bzw. p auftreten. Die Zufallsgröße X_k gibt in diesem Zusammenhang das Ergebnis des k-ten Teilexperimentes an.

Dabei wird das Ereignis $\{X_k = 1\}$ häufig als *Erfolg im k-ten Experiment* bzw. das Ereignis $\{X_k = 0\}$ als *Misserfolg im k-ten Experiment* gedeutet.

Mit jedem Bernoullischema sind gewisse konkrete Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen verbunden, von denen wir im Folgenden einige studieren werden.

Anzahl S_n der Erfolge bei n Versuchen

Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein $BS_n(p)$. Die Zufallsgröße S_k, definiert durch $S_k(\omega) = \sum_{l=1}^{k} X_l(\omega)$, ist gleich der *Anzahl der Erfolge* in den ersten k Teilexperimenten des Bernoullischemas.

Aussage 6.3 *Die Zufallsgröße S_n ist binomialverteilt mit den Parametern n und p, d.h. es gilt*

$$P(S_n = k) = \binom{n}{n} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

Beweis: $P(S_n = k) = P(X_1 + \ldots + X_n = k) =$

$$P^X(\{x \in E : \sum_{j=1}^{n} i_j = k\}) = \sum_{\substack{x=(i_1,\ldots,i_n): \\ \sum i_j = k}} \prod_{j=1}^{n} p^{i_j}(1-p)^{1-i_j} = \sum_{\substack{x=(i_1,\ldots,i_n): \\ \sum i_j = k}} p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

da alle $x \in E$ mit $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{n-k}$ besitzen (siehe (6.2)) und es $\binom{n}{k}$ solcher $x \in E$ gibt. $\square$

Insbesondere ist $ES_n = np$ und $VarS_n = np(1-p)$.

Die relative Häufigkeit der Erfolge in n Versuchen ist $\frac{S_n}{n}$. Somit gilt

$$E\frac{S_n}{n} = p \quad \text{und} \quad Var\frac{S_n}{n} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Für große n wird $\frac{S_n}{n}$ mit hoher Wahrscheinlichkeit einen Wert in der Nähe von p annehmen. Das ergibt sich aus der Tschebyschevschen Ungleichung. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt nämlich

$$P(|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon) \leq \frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n \cdot \varepsilon^2}. \tag{6.4}$$

Fixiert man $\varepsilon > 0$, so kann man durch Wahl einer genügend großen Versuchsanzahl n die rechte Seite von (6.4) beliebig klein machen. Diese Tatsache macht man sich bei unbekanntem p zunutze. Man verwendet das arithmetische Mittel $\frac{S_n}{n}$ der beobachteten Werte als statistische Schätzung für p.

Zeit T_m des m-ten Erfolges

Für die folgenden Betrachtungen nehmen wir ein unendliches Bernoullischema $BS_\infty(p)$ als gegeben an.

Die Zufallsgrößen

$$T_1(\omega) := \min\{k > 0 | X_k(\omega) = 1\},$$

$$T_m(\omega) := \min\{k > T_{m-1}(\omega) | X_k(\omega) = 1\}, \quad m \geq 2$$

geben die Zeitpunkte an, zu denen der erste bzw. der m-te Erfolg im $BS_\infty(p)$ eintritt. Dabei setzt man $\min \emptyset := \infty$ und $T_0(\omega) := 0$.

Mit diesen Bezeichnungen ist $T_{m+1} - T_m$ die Anzahl der Versuche nach dem m-ten bis zum $(m+1)$-ten Erfolg, $T_m - m$ die Anzahl der Misserfolge bis zum m-ten Erfolg und $T_{m+1} - T_m - 1$ ist die Anzahl der Misserfolge zwischen dem m-ten und dem $(m+1)$-ten Erfolg, $m \geq 0$.

Aussage 6.4 *Es gilt*

$$\left.\begin{array}{l} \{T_1 = 1\} = \{X_1 = 1\} \\ \{T_1 = k\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1\},\ k > 1 \\ \{T_1 \leq k\} = \bigcup\limits_{l=1}^{k} \{X_l = 1\}, k \geq 1 \end{array}\right\} \tag{6.5}$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition von T_1.

Analog erhalten wir

$$\{T_m = k\} = \left\{ \sum_{l=1}^{k} X_l(\omega) = m, X_k = 1 \right\}. \tag{6.6}$$

Wir erinnern daran, dass die kleinste σ-Algebra $\mathfrak{A}_k := \sigma(X_1, \ldots, X_k)$ von Teilmengen von Ω, bezüglich der alle $X_1, X_2, \ldots, X_k$ meßbar sind, aus allen Teilmengen A von Ω besteht, die die Form

$A = \{\omega \in \Omega | (X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)) \in B\}$ für ein $B \subseteq E = \{0,1\}^k$ besitzen.

(Wir hatten $\mathscr{E} = \mathfrak{P}(E)$ gesetzt.)

Man sagt, $\mathfrak{A}_k$ enthält alle diejenigen Ereignisse, die mit dem Verlauf der Folge $(X_1, X_2, \ldots)$ bis zur Zeit k zusammenhängen.

Folgerung 6.5 Für alle $m \geq 1$ und alle $k \geq m$ gilt

$$\{T_m = k\} \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \mathfrak{A}_k \tag{6.7}$$

Beweis: Die Eigenschaft (6.7) ist eine Konsequenz aus (6.6). □

Aussage 6.6 *Es gilt:*

a) $T_1 - 1$ ist geometrisch verteilt *mit dem Parameter* p.

b) $(T_{k+1} - T_{k-1}), k \geq 0$, *sind* voneinander unabhängig *und* identisch verteilt *wie* $T_1 - 1$.

c) $T_m - m$ *besitzt eine* negative Binomialverteilung *mit den Parametern* m *und* p. *(Man beachte, dass insbesondere* $P(T_m < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} P(T_m = k) = 1$ *gilt.)*

d) *Die Folge* $(X_{T_m+k}, k \geq 1)$ *bildet ein* unendliches Bernoullischema *mit dem Parameter* p *und ist unabhängig von* $\mathfrak{A}_{T_m}$.

Hier bezeichnet $\mathfrak{A}_{T_m}$ die σ-Algebra aller Ereignisse, die mit dem Verlauf der Folge $(X_1, X_2, \ldots)$ bis zur Zeit T_m zusammenhängen. Genauer, man definiert

$$\mathfrak{A}_{T_m} := \{A \in \sigma(X_1, X_2, \ldots) | A \cap \{T_m = k\} \in \mathfrak{A}_k, k \geq 1\}.$$

Beweis:

a) Es gilt wegen (6.3) und (6.2) für $k \geq 0$

$$P(T_1 - 1 = k) = P(T_1 = k + 1) = (1 - p)^k p.$$

b) Es sei m irgendeine natürliche Zahl mit $m \geq 2$. Das Ereignis

$$\bigcap_{k=0}^{m} \{T_{k+1} - T_k - 1 = t_k\} \text{ mit } t_k \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots, \}, k = 0, \ldots, m,$$

tritt genau dann ein, wenn zwischen T_k und T_{k+1} genau t_k Misserfolge stattfinden, $k = 0, \ldots, m$. Es ist folglich gleich dem Ereignis (mit der Bezeichnung $s_\ell = t_0 + t_1 + \ldots + t_\ell + \ell, 1 \leq \ell \leq m$)

$$\bigcap_{\ell=1}^{m} \{X_{s_\ell} = 1\} \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq s_\ell, \\ \ell=1,\ldots,m}}^{s_m} \{X_j = 0\}.$$

Seine Wahrscheinlichkeit ist auf Grund von (6.2) gleich

$$(1 - p)^{t_0} p (1 - p)^{t_1} p \cdot \ldots \cdot (1 - p)^{t_m} p = (1 - p)^{t_0 + t_1 + \ldots + t_m} p^m.$$

Daraus ergibt sich für jedes k mit $0 \leq k \leq m$

$$P(T_{k+1} - T_k - 1 = t_k) = (1 - p)^{t_k} p$$

und somit

$$P\Big(\bigcap_{k=0}^{m}\{T_{k+1}-T_k-1=t_k\}\Big)=\prod_{k=0}^{m}P(T_{k+1}-T_k-1=t_k)$$

für alle $t_k \in N_0, k=0,\dots,m$.
Das heißt, die $(T_k - T_{k-1} - 1), k \geq 1$ sind voneinander unabhängig und alle geometrisch mit dem Parameter p verteilt.

c) Das Ereignis $\{T_m - m = k\}$ tritt genau dann ein, wenn in $\{X_1 = i_1,\dots,X_{m+k}=i_{m+k}\}$ unter den i_j genau m mal eine Eins, sonst Nullen auftreten und $i_{m+k}=1$ gilt. Dafür gibt es $\binom{m+k-1}{m-1}$ gleichwahrscheinliche Fälle mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $p^m(1-p)^k$. Also ist

$$P(T_m - m = k) = \binom{m+k-1}{k}(1-p)^k p^m = \binom{-m}{k}(p-1)^k p^m.$$

Damit ist Teil c) bewiesen.

d) Wir beweisen d) nur für $m=1$. Der allgemeine Fall wird analog behandelt. Es sei $A \in \mathfrak{A}_{T_1}$. Dann gilt

$$A \cap \{T_1 = k\} \in \mathfrak{A}_k = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_k), \quad k \geq 1,$$

und folglich gibt es für jedes $k \geq 1$ ein $B_k \subseteq \{0,1\}^k$ mit

$$A \cap \{T_1 = k\} = \{(X_1,\dots,X_k) \in B_k\}.$$

Daraus ergibt sich für alle $r \geq 1, i_\ell \in \{0,1\}, \ell = 1,\dots,r$

$$P(A \cap \{T_1 = k\}, X_{T_1+1} = i_1, \dots, X_{T_1+r} = i_r) =$$

$$P((X_1,\dots,X_k) \in B_k, X_{k+1} = i_1, \dots, X_{k+r} = i_r). \tag{6.8}$$

Wegen der Unabhängigkeit der beiden Folgen $(X_1,\dots,X_k)$ und $(X_{k+1},\dots,X_{k+r})$ ist dieser Wert gleich

$$P((X_1, \ldots, X_k) \in B_k) \cdot P(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_{k+r} = i_r) =$$

$$P(A \cap \{T_1 = k\}) \cdot P(X_1 = i_1, \ldots, X_r = i_r).$$

Daraus ergibt sich durch Summation über $k \geq 1$ wegen $P(T_1 < \infty) = 1$ die Gleichung

$$P(A \cap \{X_{T_1+1} = i_1, \ldots, X_{T_{1+r}} = i_r\}) =$$

$$P(A)P(X_1 = i_1, \ldots, X_r = i_r) = P(A)p^{\sum\limits_{k=1}^{r} i_k}(1-p)^{r-\sum\limits_{k=1}^{r} i_k}.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Ist in einem Bernoullischema $BS_n(p)$ die Anzahl n der Versuche groß und die Erfolgswahrscheinlichkeit p in jedem einzelnen Versuch klein, so wird die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung approximiert. Das heißt

$$b(n, p; k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \tag{6.9}$$

wobei $\lambda = np$ gesetzt wird. Das ist eine Konsequenz aus dem Poissonschen Grenzwertsatz.

k	$n = 10, p = 0,2$	$n = 50, p = 0,04$	$n = 100, p = 0,02$	$\lambda = 2$
0	0,1074	0,1299	0,1326	0,1353
1	0,2684	0,2706	0,2707	0,2707
2	0,3020	0,2762	0,2734	0,2707
3	0,2013	0,1842	0,1823	0,1804
4	0,0881	0,0902	0,0902	0,0902
5	0,0264	0,0346	0,0353	0,0361
6	0,0055	0,0108	0,0114	0,0120
7	0,0008	0,0028	0,0031	0,0034
8	0,0001	0,0006	0,0007	0,0009
9	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tabelle 1. Poissonapproximation der Binomialverteilung

6.2 Irrfahrten

Wir haben bereits die symmetrische Irrfahrt $(S_k, k \leq n)$ kennen gelernt, die sich aus einem Laplace-Experiment (n-maliges Werfen einer regulären Münze) ergibt:

$$(\Omega, \mathfrak{A}, P) \text{ mit } \Omega = \{-1, +1\}^n,\ \mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega),$$

$$X_l(\omega) = x_l\,,\ \omega = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega,\ l = 1, \cdots, n,$$

$$S_k(\omega) = \sum_{l=1}^{k} X_l(\omega) \text{ und } P(\{\omega\}) = 2^{-n}, \omega \in \Omega.$$

Offenbar gilt

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = 2^{-n} \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$$

und somit für jedes k mit $1 \leq k \leq n$ und jedes $x_k \in \{-1, +1\}$

$$P(X_k = x_k) = \sum_{x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1} \cdots, x_n \in \{-1,1\}} P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \frac{1}{2}. \tag{6.10}$$

Daraus folgt für alle $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$ die Gleichung

$$[P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k). \tag{6.11}$$

Das heißt aber gerade, dass die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unter den angenommenen Voraussetzungen voneinander unabhängig sind und alle die gleiche Verteilung besitzen (m.a.W., identisch verteilt sind).

Wir behalten die Unabhängigkeit und identische Verteilung der Zufallsgröße $X_1, X_2, \ldots$ bei, lassen aber als Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X_k = 1)$ und $P(X_k = -1)$ irgend welche Werte p bzw. $q = 1 - p$ mit $p \in (0, 1)$ zu. Die Münze wird also nicht mehr als regulär vorausgesetzt. Demnach gilt

$$P(X_k = 1) = p, P(X_k = -1) = 1 - p, k = 1, 2, \cdots, n,$$

in anderer Schreibweise

$$P(X_k = i) = p^{\frac{1+i}{2}}(1-p)^{\frac{1-i}{2}}, i \in \{-1, +1\},\ 1 \leq k \leq n. \tag{6.12}$$

Die Ausgänge $\omega = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega$ der Wurfserie haben jedoch, falls $p \neq q$ gilt, nicht mehr alle die gleiche Wahrscheinlichkeit, es gilt vielmehr für $\omega = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \{-1, +1\}^n$

$$P(\{\omega\}) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k) = p^{\frac{n+s_n}{2}}(1-p)^{\frac{n-s_n}{2}} \tag{6.13}$$

mit $s_n = x_1 + \cdots + x_n$.

Durch

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}), \quad A \in \mathfrak{A}$$

ist auf $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Verteilung P definiert.

Aussage 6.7 *Bezüglich P sind wegen (6.12) und (6.13) die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \cdots, X_n$ unabhängig und identisch (gemäß (6.12)) verteilt.*

Das ergibt sich aus $P(\{\omega\}) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ für $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und (6.13).

Die Folge $(Y_k, k \leq n)$ mit $Y_k = \frac{X_k+1}{2}, 1 \leq k \leq n$, bildet ein Bernoullischema $BS_n(p)$.

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass $(X_k, k \geq 1)$ eine unendliche Folge voneinander unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen über einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit der Verteilung (6.12) ist.

Definition 6.8 *Die Folge $(S_n, n \geq 0)$ mit*

$$S_0 := s_0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1, s_0 \in Z,$$

heißt eine Irrfahrt auf Z mit dem Parameter p und mit Start in s_0. *Ist $s_0 = 0$, so nennt man $(S_n, n \geq 0)$ einfach eine Irrfahrt mit dem Parameter p. Im Fall $p = q = \frac{1}{2}$ spricht man von einer* symmetrischen Irrfahrt *auf Z. Dabei bezeichnet Z die Menge aller ganzen Zahlen.*

Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnung

$$\mathfrak{A}_n := \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n), \ n \geq 1,$$

d.h., $\mathfrak{A}_n$ ist die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von Ω, bezüglich der alle $X_1, X_2, \cdots, X_n$ messbar sind. Es gilt $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}$, da alle X_k bezüglich $\mathfrak{A}$ messbar sind, und $\mathfrak{A}_n$ besteht hier aus allen Teilmengen A von Ω der Form

$A = \{\omega \in \Omega \,|\, (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)) \in B\}$, wobei B irgend eine Teilmenge von $\{-1, +1\}^n$ ist.

Wegen der bijektiven Beziehung zwischen $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ und $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ haben wir auch

$$\mathfrak{A}_n = \sigma(S_1, S_2, \cdots, S_n), \ n \geq 1.$$

Eine fast offensichtliche Eigenschaft jeder Irrfahrt $(S_n, n \geq 0)$ mit Parameter p ist die folgende:

Aussage 6.9 *Wählt man eine feste Zeit $n_0 \geq 1$ und bildet man*

$$\tilde{S}_n := S_{n+n_0} - S_{n_0} \quad (n \geq 0),$$

so ist $(\tilde{S}_n, n \geq 0)$ wieder eine Irrfahrt mit demselben Parameter p. Außerdem ist $(\tilde{S}_n, n \geq 0)$ unabhängig von $\mathfrak{A}_{n_0}$.

Beweis: Die Zufallsgrößen

$$\tilde{X}_k := X_{n_0+k}, \ k \geq 1$$

sind voneinander unabhängig und haben alle die gleiche Verteilung:

$P(\tilde{X}_k = x_k) = p^{\frac{1+x_k}{2}}(1-p)^{\frac{1-x_k}{2}}$, $x_k \in \{+1, -1\}$. Weiterhin ist

$$P(\tilde{X}_1 = x_1, \cdots, \tilde{X}_n = x_n) = P(X_{n_0+1} = x_1, \cdots, X_{n_0+n} = x_n) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} P(X_{n_0+k} = x_k) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k) = p^{\frac{n+s_n}{2}}(1-p)^{\frac{n-s_n}{2}} \text{ mit}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Wegen $\tilde{S}_n = S_{n_0+n} - S_{n_0} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k,\ n \geq 0$ ist folglich $(\tilde{S}_n)$ eine Irrfahrt mit dem Parameter p. Ist $A \in \mathfrak{A}_{n_0}$, so gibt es ein $B \subseteq \{-1, +1\}^{n_0}$ mit $A = \{(X_1, \cdots, X_{n_0}) \in B\}$. Da alle $(X_k, k \geq 1)$ voneinander unabhängig sind, sind es auch die beiden Folgen $(X_1, X_2, \cdots, X_{n_0})$ und $(X_{n_0+1}, X_{n_0+2}, \cdots)$ und somit auch A und $(\tilde{S}_n, n \geq 1)$. Damit ist die Aussage bewiesen. $\square$

Praktisch nach jedem Zeitpunkt n_0 beginnt also die Irrfahrt bei S_{n_0} startend von Neuem, sie hat kein Gedächtnis.

Die Verteilung von S_n

Es sei $(S_n, n \geq 0)$ eine Irrfahrt mit dem Parameter p. Interpretieren wir S_n als Lage eines Teilchens zur Zeit n, so befindet sich das Teilchen zu geraden Zeitpunkten n in einem geradzahligen Punkt, zu ungeraden Zeitpunkten n in einem ungeradzahligen Punkt.

Aussage 6.10 *Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_n gilt:*

a) $P(S_0 = 0) = 1$

b) $n = 2m, \quad m \geq 1,$

$$P(S_{2m} = 2k) = \binom{2m}{k+m} p^{m+k}(1-p)^{m-k}, -m \leq k \leq m$$

$$P(S_{2m} = l) = 0 \;\; sonst.$$

c) $n = 2m+1, \quad m \geq 0,$

$$P(S_{2m+1} = 2k+1) = \binom{2m+1}{k+m+1} p^{k+m+1}(1-p)^{m-k}, \; -m-1 \leq k \leq m$$

$$P(S_{2m+1} = l) = 0 \;\; sonst.$$

Beweis:

b) $P(S_{2m} = 2k) = P(\{\omega \in \Omega | S_{2m}(\omega) = 2k\}) = \sum_{\omega \in \Omega : S_{2m}(\omega) = 2k} P(\{\omega\}).$

$S_{2m}(\omega) = 2k$ ist genau dann der Fall, wenn in $\omega = (x_1, x_2, \cdots, x_{2m})$ genau $(m+k)$-mal die $+1$ auftritt. Jedes solche ω hat wegen (6.13) die gleiche Wahrscheinlichkeit $p^{m+k}(1-p)^{m-k}$ und es gibt $\binom{2m}{m+k}$ Folgen ω dieser Art.

c) Der Beweis erfolgt analog zu b).

$\square$

Zeit des ersten Erreichens des Zustandes m

In diesem Abschnitt werden die Zeiten V_m studiert, zu denen die Irrfahrt zum ersten Mal den Zustand $m (m \geq 1)$ erreicht.

Interpretiert man die Irrfahrt $(S_n, n \geq 0)$ mit $S_0 = 0$, so wie wir das bereits in Abschnitt 2.5 getan haben, als Guthaben eines Spielers, so ist es u. a. von

Interesse, wann dieses Guthaben zum ersten Mal positiv wird bzw. zum ersten Mal den Betrag m erreicht. Das sind gerade die eben erwähnten zufälligen Zeiten V_1 bzw. V_m.

Definition 6.11 *Es sei $m \geq 1$. Die Zufallsgröße*

$$V_m(\omega) := \min\{k \geq 1 | S_k(\omega) = m\} \text{ mit } \min \emptyset := \infty,\ \omega \in \Omega$$

heißt die Zeit des ersten Erreichens *des Punktes m durch die Irrfahrt $(S_n, n \geq 0)$.*

Zeiten des ersten Erreichens sind Beispiele sogenannter zufälliger Zeiten und spielen sowohl in der Theorie zufälliger Prozesse als auch für praktische Anwendungen eine wichtige Rolle.

Der Fall $V_m(\omega) = \infty$ tritt genau dann ein, wenn $S_n(\omega) < m$ für alle $n \geq 1$ gilt. Weiterhin gilt offenbar

$$S_{V_m(\omega)}(\omega) = m, \quad \text{falls } \omega \in \{V_m < \infty\}. \tag{6.14}$$

Um Aussagen über die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $V_1, V_2, \cdots$ zu erhalten, führen wir die Zufallsgrößen V_m auf $(S_n, n \geq 1)$ bzw. $(X_k, k \geq 1)$ zurück, deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen wir bereits kennen.

Lemma 6.12 *Es gilt für $k \geq 0, r > k$*

$$\{V_1 = 2k+1\} = \{S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \cdots, S_{2k} = 0, S_{2k+1} = 1\} \tag{6.15}$$

$$\{V_1 = 2k+1, V_2 = 2r\} =$$

$$\{S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \cdots, S_{2k-1} \leq 0, S_{2k} = 0, S_{2k+1} = 1, S_{2k+2} \leq 1, \cdots$$

$$S_{2r-2} \leq 1, S_{2r-1} = 1, S_{2r} = 2\} \tag{6.16}$$

und allgemein,

$$\{V_1 = k_1, V_2 = k_2, \cdots, V_m = k_m\} =$$

$$\{S_1 \le 0, S_2 \le 0, \cdots, S_{k_1-1} = 0, S_{k_1} = 1, S_{k_1+1} \le 1, \cdots, S_{k_m-1} = m-1, S_{k_m} = m\},$$

$$1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_m,\ m \ge 1.$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition der $V_1, V_2, \cdots, V_m$.

Bemerkung: Die rechte Seite von (6.15) ist so zu verstehen, dass $S_\ell \le 0$ für alle $\ell \le 2k-1$ gelten soll. Für den Fall $k=0$ ist diese Bedingung nicht relevant und entfällt ohne weiteren Hinweis. Genauso verstehen wir im Weiteren analoge Ausdrücke, z.B. in (6.16).

Mit der folgenden Aussage zeigen wir, dass die Irrfahrt, unter der Bedingung, dass sie den Punkt Eins jemals erreicht, nach der Zeit V_1 wieder von Neuem als Irrfahrt mit dem gleichen Parameter im Punkt Eins beginnt.

Zur Formulierung der Aussage führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Für alle $\omega \in \{V_1 < \infty\}$ setzen wir

$$X_n^*(\omega) := X_{V_1(\omega)+n}(\omega), \quad n \ge 1,$$

und lassen X_n^* undefiniert auf $\{V_1 = \infty\}$. Dann ist X_n^* für P^*-fast alle ω definiert, wobei P^* die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\cdot|V_1 < \infty)$ bezeichnet. (Beachte $P(V_1 < \infty) \ge P(X_1 = 1) = p > 0$ und $P^*(.) = P(.)$, falls $P(V_1 < \infty) = 1$.) Es sei

$$S_n^* = \sum_{k=1}^n X_k^* \text{ und } S_0^* = 0.$$

Auf Grund dieser Definition und wegen (6.14) gilt für alle $n \ge 0$

$$S_n^* = S_{V_1+n} - S_{V_1} = S_{V_1+n} - 1, \quad P^* - \text{fast sicher}.$$

Aussage 6.13 *Die Folge $(S_n^*, n \geq 0)$ ist bezüglich der Verteilung P^* eine Irrfahrt mit dem Parameter p.*

Beweis:

$$P(V_1 < \infty, X_1^* = x_1, \cdots, X_n^* = x_n) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(V_1 = 2k+1, X_1^* = x_1, \cdots, X_n^* = x_n) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(V_1 = 2k+1,\ X_{2k+2} = x_1, \cdots, X_{2k+1+n} = x_n) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(S_1 \leq 0, S_2 \leq 0, \cdots, S_{2k} = 0, S_{2k+1} = 1, X_{2k+2} = x_1, \cdots, X_{2k+1+n} = x_n).$$

Jetzt nutzen wir die Unabhängigkeit von $(S_1, S_2, \cdots, S_{2k+1})$ und $(X_{2k+2}, \cdots, X_{2k+1+n})$ aus sowie die Tatsache, dass $(X_{2k+2}, \cdots, X_{2k+1+n})$ die gleiche Verteilung wie $(X_1, \cdots, X_n)$ besitzt und erhalten die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(V_1 = 2k+1) P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) =$$

$$P(V_1 < \infty) \cdot P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) =$$

$$P(V_1 < \infty) \cdot p^{\frac{n+s_n}{2}} (1-p)^{\frac{n-s_n}{2}}.$$

Somit gilt

$$P^*(X_1^* = x_1, \ldots, X_n^* = x_n) = p^{\frac{n+s_n}{2}} (1-p)^{\frac{n-s_n}{2}}. \tag{6.17}$$

□

Das Lemma besagt, nach der zufälligen Zeit V_1 (sofern diese endlich ist) verhält sich die Irrfahrt $(S_n, n \geq 0)$, als startete sie von Neuem mit demselben Parameter p, dieses Mal vom Zustand Eins.

Wir bemerken noch eine Eigenschaft, die wir später benutzen werden. Es sei

$V_1^*(\omega) := \min\{k \geq 1 \mid S_k^*(\omega) = 1\}, \min \emptyset = \infty$. Dann gilt

$$V_1^* = V_2 - V_1 \quad \text{auf} \quad \{V_1 < \infty\}. \tag{6.18}$$

Im Fall $V_1(\omega) < \infty$ haben wir nämlich

$$V_1^*(\omega) + V_1(\omega) = \min\{k \geq 1 | S_k^*(\omega) = 1\} + V_1(\omega) =$$

$$\min\{k + V_1(\omega) \geq V_1(\omega) + 1 | S_{V_1(\omega)+k}(\omega) - S_{V_1(\omega)}(\omega) = 1\} =$$

$$\min\{m > V_1(\omega) | S_m(\omega) = 2\} =$$

$$\min\{m \geq 1 | S_m(\omega) = 2\} = V_2(\omega).$$

Wir haben oben gesehen, dass die Irrfahrt $(\tilde{S}_n, n \geq 0)$ mit $\tilde{S}_n = S_{n+n_0} - S_{n_0}$ unabhängig von $(X_1, \cdots, X_{n_0})$, also von $\mathfrak{A}_{n_0} = \sigma(X_1, \cdots, X_{n_0})$ ist. Ein analoger Sachverhalt gilt auch für $(S_n^*, n \geq 0)$ mit $S_n^* = S_{V_1+n} - S_{v_1}$. Allerdings ist er etwas komplizierter in der Formulierung, da jetzt die Zeit V_1 eine Zufallsgröße ist, die überdies den Wert Unendlich annehmen kann. Wir führen folgendes Ereignissystem aus $\mathfrak{A}$ ein:

$$\mathfrak{A}_{V_1} := \{A \in \mathfrak{A} | A \cap \{V_1 = 2k+1\} \in \mathfrak{A}_{2k+1}, k \geq 0\}.$$

Lemma 6.14 $\mathfrak{A}_{V_1}$ *ist eine Teil-*σ*-Algebra von* $\mathfrak{A}$ *und* V_1 *ist bezüglich* $\mathfrak{A}_{V_1}$ *meßbar.*

Beweis: $\emptyset$ und Ω gehören zu $\mathfrak{A}_{V_1}$, die übrigen Eigenschaften einer σ-Algebra folgen unter Zuhilfenahme der Tatsache, dass alle $\mathfrak{A}_{2k+1}, k \geq 0$, σ-Algebren sind. Man beachte, dass $\{V_1 = 2k+1\} \in \mathfrak{A}_{2k+1}, k \geq 0$, gilt. Die Meßbarkeit von V_1 bez. $\mathfrak{A}_{V_1}$ ergibt sich aus

$$\{V_1 = 2m+1\} \cap \{V_1 = 2k+1\} \in \mathfrak{A}_{2k+1}, k, m \geq 0.$$

□

Nun können wir die angekündigte Eigenschaft der Irrfahrt $(S_n^*, n \geq 0)$ formulieren.

Aussage 6.15 *Die Folge $(S_n^*, n \geq 1)$ ist bezüglich P^*, also bezüglich P unter der Bedingung $V_1 < \infty$, eine Irrfahrt mit dem Parameter p, die unabhängig von $\mathfrak{A}_{V_1}$ ist.*

Beweis: Es sei $A \in \mathfrak{A}_{V_1}$. Nach Definition von $\mathfrak{A}_{V_1}$ gibt es für jedes $k \geq 0$ eine Teilmenge B_k von $\{-1,1\}^{2k+1}$ mit $A \cap \{V_1 = 2k+1\} = \{(X_1, \cdots, X_{2k+1}) \in B_k\}$. Folglich gilt für alle $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \{-1,+1\}^n$:

$$P(A \cap \{X_1^* = x_1, \cdots, X_n^* = x_n\} \cap \{V_1 < \infty\}) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A \cap \{V_1 = 2k+1\} \cap \{X_1^* = x_1, \cdots, X_n^* = x_n\}) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P((X_1, \cdots, X_{2k+1}) \in B_k, X_{2k+2} = x_1, \cdots, X_{2k+n+1} = x_n) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P((X_1, \cdots, X_{2k+1}) \in B_k) \cdot P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\{V_1 = 2k+1\} \cap A) P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) =$$

$$P(A \cap \{V_1 < \infty\}) P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n).$$

Teilen wir Anfangs- und Endterm dieser Gleichung durch $P(V_1 < \infty)$ und berücksichtigen wir die Formel (6.17), so erhalten wir

$$P^*(A \cap \{X_1^* = x_1, \cdots, X_n^* = x_n\}) =$$

$$P^*(A) \cdot P^*(X_1^* = x_1, \cdots, X_n^* = x_n).$$

$\square$

Folgerungen 6.16 Bezüglich P^*, also bezüglich P unter der Bedingung $\{V_1 < \infty\}$, sind V_1 und $V_2 - V_1$ unabhängige Zufallsgrößen mit

$$P^*(V_2 - V_1 = 2k+1) = P^*(V_1^* = 2k+1) = P(V_1 = 2k+1), k \geq 0. \quad (6.19)$$

Beweis: Mittels Aussage 6.15 folgt wegen (6.18) $\{V_1 = 2k+1\} \in \mathfrak{A}_{V_1}$ die Gleichung

$$P^*(V_1 = 2k+1, V_2 - V_1 = 2m+1) =$$
$$P^*(V_1 = 2k+1, V_1^* = 2m+1) = P^*(V_1 = 2k+1) \cdot P^*(V_1^* = 2m+1), k, m \geq 0.$$

Durch Summation über $k \geq 0$ und wegen $P^*(V_1 < \infty) = 1$ und Aussage 6.13 ergibt sich die Folgerung. $\square$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zufälligen Zeit V_1

Wir bestimmen die Wahrscheinlichkeiten $P(V_1 = 2k+1)$ mittels der erzeugenden Funktion g_1 von V_1:

$$g_1(s) := Es^{V_1} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{2k+1} P(V_1 = 2k+1), |s| \leq 1.$$

Es gilt $P(V_1 = 1) = p$, und für $k \geq 1$ haben wir

$$P(V_1 = 2k+1) =$$

$$P(X_1 = -1, S_2 \leq 0, \ldots, S_{2k} = 0, S_{2k+1} = 1) =$$

$$P(X_1 = -1, S_2 - X_1 \leq 1, \ldots, S_{2k} - X_1 = 1, S_{2k+1} - X_1 = 2) =$$

$$P(X_1 = -1)P(S_1 \leq 1, S_2 \leq 1, \ldots, S_{2k-1} = 1, S_{2k} = 2) =$$

$$(1-p)P(V_2 = 2k).$$

Somit ist mit der Bezeichnung $q = 1 - p$

$$\begin{aligned} g_1(s) &= ps + qs \sum_{k=0}^{\infty} s^{2k} P(V_2 = 2k) \\ &= ps + qsEs^{V_2}, \ |s| \leq 1. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Wegen $s^{V_2(\omega)} = 0$, falls $V_2(\omega) = \infty$ und $|s| < 1$, gilt

$$Es^{V_2} = E[\mathbb{1}_{\{V_1<\infty\}} s^{V_2}] = E[\mathbb{1}_{\{V_1<\infty\}} s^{V_2-V_1} s^{V_1}] =$$

$$E^*[s^{V_2-V_1} s^{V_1}] P(V_1 < \infty) = E^* s^{V_1^*} E^* s^{V_1} \cdot P(V_1 < \infty) =$$

$$Es^{V_1} \cdot Es^{V_1} = [Es^{V_1}]^2 = g_1^2(s). \tag{6.21}$$

Dabei wurden die Unabhängigkeit von V_1 und $V_1^* = V_2 - V_1$ bezüglich P^* (Folgerung 6.16), die Definition

$E^*[Z] = E[Z \cdot \mathbb{1}_{\{V_1<\infty\}}] \,/\, P(V_1 < \infty)$ und die Gleichung

$E^* s^{V_1^*} = Es^{V_1}$ (Aussage 6.15) benutzt.

Wegen (6.20) und (6.21) genügt $g_1(\cdot)$ der Gleichung

$$g_1^2(s) - \frac{1}{qs} g_1(s) + \frac{p}{q} = 0, |s| < 1, s \neq 0.$$

Als Lösung ergibt sich auf Grund der Beschränktheit von $g_1(\cdot)$ auf $(-1, 1)$:

$$g_1(s) = \frac{1}{2qs}[1 - (1 - 4pqs^2)^{\frac{1}{2}}], |s| < 1, s \neq 0.$$

Anhand dieser erzeugenden Funktion berechnen wir die Einzelwahrscheinlichkeiten $P(V_1 = 2k + 1)$, die Wahrscheinlichkeit $P(V_1 < \infty)$, Eins jemals zu erreichen, und EV_1.

Zunächst gilt

$$P(V_1 < \infty) = \sum_{k=0}^{\infty} P(V_1 = 2k+1) = \lim_{s \uparrow 1} g_1(s),$$

also

$$P(V_1 < \infty) = \frac{1-(1-4pq)^{\frac{1}{2}}}{2q} = \frac{1-|p-q|}{2q} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad p \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{p}{q} & \text{falls} \quad p < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{6.22}$$

Für die Einzelwahrscheinlichkeiten der Verteilung von V_1 ergibt sich durch Entwicklung der erzeugenden Funktion $g_1(\cdot)$ in eine Potenzreihe

$$P(V_1 = 2k-1) = \frac{(2pq)^k}{2qk!} \ (2k-3)!!, \ k \geq 1 \tag{6.23}$$

mit $m!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot m$ für ungerades m (Übung).

Wegen $EV_1 = \lim_{s \uparrow 1} \frac{d}{ds} q_1(s)$ erhalten wir

$$EV_1 = \begin{cases} \frac{1}{|p-q|}, & \text{falls} \quad p > q \\ \infty, & \text{falls} \quad p \leq q \end{cases} \tag{6.24}$$

Folgerungen 6.17 Für die symmetrische Irrfahrt $(p = q) = \frac{1}{2}$ gelten die Gleichungen

$$P(V_1 < \infty) = 1 \text{ und } EV_1 = \infty. \tag{6.25}$$

Index