Kapitel 9

Charakteristische Funktionen

Jeder Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(R_1, \mathfrak{B}_1)$ (allgemeiner: $(R_n, \mathfrak{B}_n)$) ist eine komplexwertige Funktion, ihre charakteristische Funktion, zugeordnet, durch die sie wiederum auch eindeutig bestimmt ist. Alle Eigenschaften der Verteilung spiegeln sich in Eigenschaften ihrer charakteristischen Funktion wider. In vielen Fällen, z.B. bei der Herleitung von Grenzwertsätzen, bilden charakteristische Funktionen ein leistungsfähiges Werkzeug.

Es sei X eine reellwertige Zufallsgröße über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit der Verteilung P^X und der Verteilungsfunktion F_X, die wir auch kurz mit F bezeichnen:

$$F(x) = F_X(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \leq x),\ x \in R_1.$$

Definition 9.1 *Als charakteristische Funktion φ der Zufallsgröße X (bzw. der Verteilungsfunktion F) bezeichnet man die Funktion*

$$\varphi(u) = E\cos(uX) + iEsin(uX),\ u \in R_1,\ \ i \text{ imaginäre Einheit.} \tag{9.1}$$

Man schreibt auch

$$\varphi(u) = E\mathrm{e}^{iuX},\ \textit{oder}$$

$$\varphi(u) = \int\limits_{R_1} \mathrm{e}^{iux} P^X(dx) =: \int\limits_{R_1} \mathrm{e}^{iux} F(dx),\ u \in R_1.$$

Statt φ verwenden wir die Bezeichnung φ_X oder φ_F, wenn wir die Zufallsgröße X oder die Verteilungsfunktion F hervorheben sollen.

Die charakteristische Funktion φ_X ist für jede reellwertige Zufallsgröße X definiert und gleich der Fouriertransformierten des Maßes P^X (bis auf eventuell einen konstanten Faktor).

Bevor wir Eigenschaften charakteristischer Funktionen untersuchen, zeigen wir die Gültigkeit der folgenden Ungleichung (9.2). Definiert man für komplexwertige Funktionen f auf R_1 den Erwartungswert $Ef(X)$ durch $Ef(X) := E(Re\, f(X)) + i\, E(Im\, f(X))$ (Endlichkeit beider Erwartungswerte der rechten Seite sei vorausgesetzt), so gilt

$$|Ef(X)| \leqq E|f(X)|. \tag{9.2}$$

Beweis: Ist f eine Elementarfunktion

$$f(x) = \sum_1^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \quad , \quad x \in R,$$

α_i komplex, so gilt

$|Ef(X)| = |\sum\limits_1^n \alpha_i P(A_i)| \leq \sum\limits_1^n P(A_i)|\alpha_i| = E|f(X)|$. Für allgemeine Borelmessbare f mit $E|f(X)| < \infty$ folgt (9.2) wie üblich, mit der Approximationsmethode.

Eine sofortige Konsequenz aus der Definition der charakteristischen Funktion ist

$$\varphi_{aX+b}(u) = \mathrm{e}^{iub}\varphi_X(au),\ u \in R_1, \tag{9.3}$$

für alle $a, b \in R_1$. Insbesondere, falls $0 < \sigma^2 = D^2X < \infty$ gilt, haben wir

$$\varphi_{X^*}(u) = \mathrm{e}^{-iu\frac{\mu}{\sigma}}\varphi_X\left(\frac{u}{\sigma}\right),\ u \in R_1. \tag{9.3'}$$

Dabei bezeichnet X^* die *standardisierte Zufallsgröße* $\frac{X-\mu}{\sigma_X}$ mit $\mu = EX$.

Beispiele 9.2

a) $X \sim B(n,p)$ (Binomialverteilung)

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \mathrm{e}^{iku} = (p\,\mathrm{e}^{iu} + q)^n,\ u \in R_1,$$

b) $X \sim P(\lambda)$ (Poissonverteilung)

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{iuk} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{iu}-1)},\ u \in R_1,$$

c) $X \sim NB(v,p)$ (Negative Binomialverteilung)

$$\varphi_X(u) = \Big(\frac{p}{1-q\mathrm{e}^{iu}}\Big)^v \text{ mit } q = 1-p,\ u \in R_1,$$

d) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (Normalverteilung)

$$\varphi_X(u) = \exp\Big(-\frac{\sigma^2 u^2}{2} + i\mu u\Big),\ u \in R_1,$$

e) $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ (Gammaverteilung)

$$\varphi_X(u) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - iu}\Big)^\alpha,\ u \in R_1,$$

f) $X \sim$ Cauchyverteilung , $a > 0$, Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2},\ x \in R_1$,

$$\varphi_X(u) = \exp(-a|u|),\ u \in R_1,$$

g) Ausgeartete Verteilung: $X = a \in R_1$

$$\varphi_X(u) = \mathrm{e}^{iua},\ u \in R_1.$$

Aussage 9.3 *Es sei φ die charakteristische Funktion einer Zufallsgröße X. Dann gelten folgende Eigenschaften:*

a) $|\varphi(u)| \le \varphi(0) = 1,\ u \in R_1,$

b) $\varphi(\cdot)$ *ist gleichmäßig stetig auf* R_1.

c) $\overline{\varphi(u)} = \varphi(-u),\ u \in R_1$.

d) $\varphi(\cdot)$ *ist genau dann eine reellwertige Funktion, falls die Verteilung* P^X *symmetrisch ist, d.h., falls* $P^X(-B) = P^X(B)$ *für alle* $B \in \mathfrak{B}_1$, *wobei* $-B := \{-x : x \in B\}$ *gesetzt wird.*

e) *Falls für ein* $n \geq 1$ *das* n*-te Moment von* X *endlich ist, d.h., falls* $E|X|^n < \infty$ *gilt, so ist* $\varphi(\cdot)$ n*-mal stetig differenzierbar, und es gilt für alle* k *mit* $1 \leq k \leq n$

$$\varphi^{(k)}(u) = \frac{d^k}{du^k}\varphi(u) = \int\limits_R (ix)^k \mathrm{e}^{iux} F(dx), \text{ insbesondere}$$

$$EX^k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}.$$

Weiterhin gilt

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(iu)^k}{k!} EX^k + \frac{(iu)^n}{n!}\varepsilon_n(u),\ u \in R_1, \tag{9.4}$$

mit einer Funktion $\varepsilon_n(u),\ u \in R_1$, *für die*

$$|\,\varepsilon_n(u)| \leq 3E|X|^n \text{ und } \lim_{u \to 0} \varepsilon_n(u) = 0$$

erfüllt ist.

f) *Wenn für ein* $m \geq 1$ *die Ableitung* $\varphi^{(2m)}$ *bei* 0 *existiert und endlich ist, so folgt* $E(X^{2m}) < \infty$.

g) *Wenn* $E|X|^n < \infty$ *für alle* $n \geq 1$ *und* $\frac{1}{R} := \overline{\lim_{n\to\infty}}[\frac{1}{n}(E|X|^n)^{\frac{1}{n}}] < \infty$ *gelten, so haben wir für alle* u *mit* $|u| < R$ *die Gleichung*

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} EX^n.$$

Zum Beweis:

a) $|\varphi(u)| \leqq E|e^{iuX}| = 1 = \varphi(0)$ wegen (9.2).

b) $$|\varphi(u+h) - \varphi(u)| \leq \int\limits_{R_1} |e^{ixu}|\,|e^{ixh} - 1|F(dx) =$$
$$= E|e^{ihx} - 1| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad u \in R_1$$

auf Grund des Satzes von der majorisierten Konvergenz.

c) $Ee^{-iuX} = \overline{Ee^{iuX}}$.

d) Ist P^X symmetrisch, so gilt für jede beschränkte, schiefsymmetrische Borel-messbare Funktion g (d.h. $g(-s) = -g(s),\ s \in R_1$) die Beziehung $Eg(X) = 0$. (Sie ist richtig nach Definition, falls g auf $(0, \infty)$ gleich einer Indikatorfunktion ist. Den allgemeinen Fall beweist man wie üblich mittels Approximation.) Also ist

$$\int\limits_{R_1} \sin(ux) \cdot P^X(dx) = 0, d.h.$$

$$\varphi_X(u) = E\cos(uX) = \int\limits_{R_1} \cos(ux) F(dx)\ u \in R_1.$$

Ist umgekehrt φ_X reellwertig, so folgt wegen c) die Gleichung $\varphi_X(u) = \varphi_{-X}(u),\ u \in R_1$.
Aus dem Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen (siehe unten) ergibt sich, dass die Verteilungsfunktionen von X und $-X$ übereinstimmen:

$$F_X = F_{-X}.$$

Das bedeutet $P^X = P^{-X}$, also

$$P(X \in B) = P(-X \in B) = P(X \in -B),\ B \in \mathfrak{B}_1.$$

e) Wir nehmen zunächst $n = 1$ an. Dann gilt mit $\varphi = \varphi_X$

$$\frac{\varphi(u+h) - \varphi(u)}{h} = E\Big(\mathrm{e}^{iuX}\frac{(\mathrm{e}^{ihX} - 1)}{h}\Big) \text{ und}$$

$$\text{aus } \frac{|\mathrm{e}^{ihx} - 1|}{h} \leq |x| \;\text{ sowie }\; \mathrm{E}|X| < \infty$$

folgt mittels des Satzes von der majorisierten Konvergenz, dass $\varphi'(u)$ existiert und endlich ist:

$$\varphi'(u) = \lim_{h\to 0} E\Big(\,\mathrm{e}^{iuX}\frac{(\mathrm{e}^{ihX} - 1)}{h}\Big) = iE(X\mathrm{e}^{iuX}).$$

Die Stetigkeit von φ' zeigt man wie in b) die von φ.

Für $n > 1$ folgt nunmehr der Beweis mittels vollständiger Induktion analog.
Zum Beweis von (9.4) erinnern wir daran, dass für jedes $x \in R_1$ und für jedes n reelle Zahlen ϑ_1, ϑ_2 mit $|\vartheta_i| \leq 1; i = 1, 2$, existieren, so dass

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{(ix)^n}{n!}[\cos \vartheta_1 x + i \sin \vartheta_2 x]$$

richtig ist. Daraus ergibt sich für $x = uX$ die Gleichung

$$E\mathrm{e}^{iuX} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!} EX^k + \frac{(iu)^n}{n!}[EX^n + \varepsilon_n(u)]$$

mit

$$\varepsilon_n(u) = E\big[X^n(\cos[\vartheta_1(\omega)\cdot uX] + i\sin[\vartheta_2(\omega)\cdot uX] - 1)\big].$$

Weiter folgt damit, dass gilt

$$|\varepsilon_n(u)| \leq 3E|X|^n \ , \ u \in R_1,$$

und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir

$$\varepsilon_n(u) \to 0 \text{ für } u \to 0.$$

Die Eigenschaften f) und g) werden wir im Weiteren nicht benutzen. Für ihren Beweis sei deshalb z. B. auf Siraev (1988), Kap. II; 12 verwiesen.

Die Aussage f) ist i. a. nicht richtig für ungerade $n = 2m + 1$, d. h. aus $|\varphi^{(2m+1)}(0)| < \infty$ folgt noch nicht $E|X|^{2m+1} < \infty$. Ein Gegenbeispiel findet man z. B. in Galambos, J., Advanced Probability Theory, Marcel-Dekker (1998), Chapter 3. □

Im Folgenden führen wir vier Eigenschaften charakteristischer Funktionen an, die sie, zusammen mit der eben formulierten Aussagen, zu einem nützlichen Werkzeug der Wahrscheinlichkeitstheorie machen. Ihre Beweise überschreiten den Rahmen dieser Vorlesung. Man findet sie u. a. in Siraev (1988), Kap. II, 12.

Eindeutigkeitssatz 9.4 *Sind F und G zwei Verteilungsfunktionen auf R_1 mit*

$$\varphi_F(u) = \varphi_G(u), \quad u \in R_1,$$

dann gilt $F(x) = G(x)$ für alle $x \in R_1$.

Umkehrformel 9.5 *Es sei F eine Verteilungsfunktion auf R_1 mit der charakteristischen Funktion φ_F. Dann gilt:*

a) Für alle $a, b \in R_1$ mit $a < b$, in denen F stetig ist, gilt

$$F(b) - F(a) = \lim_{c \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{\mathrm{e}^{-iau} - \mathrm{e}^{-ibu}}{iu} \varphi(u) du. \tag{9.5}$$

b) Ist $\int\limits_{R_1} |\varphi_F(u)|du < \infty$, *so besitzt* F *eine Dichte* f, *und es gilt:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R_1} \mathrm{e}^{-ixu} \varphi_F(u)du, x \in R_1. \tag{9.6}$$

c) Ist F *die Verteilungsfunktion einer diskreten, auf* $N = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ *konzentrierten Verteilung* $(p(k), k \geq 0)$, *so gilt*

$$p(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-iku} \varphi_F(u)du, \quad k \geq 0. \tag{9.7}$$

Stetigkeitssatz 9.6 *Ist* $(F_n, n \geq 1)$ *eine Folge von Verteilungsfunktionen auf* R_1, φ_n *die charakteristische Funktion von* F_n*:*

$$\varphi_n(u) = \int\limits_{R_1} \mathrm{e}^{iux} F_n(dx),\ u \in R_1,$$

so gilt:

a) Wenn $w - \lim\limits_{n\to\infty} F_n = F$ *für eine Verteilungsfunktion* F *richtig ist, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(u) = \varphi_F(u) = \int\limits_{R_1} \mathrm{e}^{iux} F(dx),\ u \in R_1.$$

b) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(u) =: \varphi(u)$ *für alle* $u \in R_1$ *existiert, und wenn die so definierte Funktion* φ *bei* $u = 0$ *stetig ist, so ist* φ *die charakteristische Funktion einer Verteilungsfunktion* F, *und es gilt*

$$w - \lim_{n\to\infty} F_n = F.$$

Bemerkung: $w - \lim F_n = F$ bedeutet für Verteilungsfunktionen F_n und F

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

für alle x, die Stetigkeitspunkte von F sind.

Faltungssatz 9.7 *Sind X_1 und X_2 zwei unabhängige reellwertige Zufallsgrößen, so gilt*

$$\varphi_{X_1+X_2}(u) = \varphi_{X_1}(u)\varphi_{X_2}(u),\ u \in R_1. \tag{9.8}$$

Der Beweis dieser Gleichung ergibt sich auf Grund der Unabhängigkeit leicht aus

$$E\mathrm{e}^{iu(X_1+X_2)} = E\mathrm{e}^{iuX_1}E\mathrm{e}^{iuX_2},\ u \in R_1.$$

Wir formulieren eine wichtige Folgerung aus dem Faltungssatz.

Folgerung 9.8 Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ voneinander unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit der charakteristischen Funktion φ, so gilt für $M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ die Gleichung

$$\varphi_{M_n}(u) = \left[\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\right]^n, \quad u \in R_1. \tag{9.9}$$

Für eine Ausdehnung des Begriffes der charakteristischen Funktion auf zufällige Vektoren und seine Untersuchung siehe z. B. Jacod, Protter (2000), Chapter 13 oder Siraev (1988), Kap. II, 12. Wir geben hier nur die Definition und eine oft benutzte Aussage an.

Ist $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ ein zufälliger Vektor, so definiert man als seine charakteristische Funktionwie folgt:

$$\varphi_X(u_1, \ldots, u_n) := E\exp(iu^T X) \quad , \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^T \in R_n.$$

Von besonderem Interesse ist dabei die

Aussage 9.9 *$X_1, \ldots, X_n$ sind genau dann voneinander unabhängig, wenn gilt*

$$\varphi_X(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(u_k), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^T \in R_n,$$

wobei $\varphi_{X_k}(u_k) = E\exp(iu_k X_k)$ die charakteristische Funktion von X_k ist, $k = 1, \ldots, n$.

Zum Beweis siehe die angegebene Literatur.

Index