Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

1. Übung, 18. 04. 2005

1. Es sei X eine reellwertige Zufallsgröße mit F als Verteilungsfunktion. Man zeige:

   a) Die Menge
   $I_F := \{u \in R_1 | \int_{R_1} \exp(ux)F(dx) < \infty\}$
   ist ein Intervall, das die Null enthält.

   b) Ist $0 \in \overset{o}{I}_F$ so ist die Funktion
   $\psi_F(u) := ln \int_{R_1} \exp(ux)F(dx)$
   auf $\overset{o}{I}_F$ unendlich oft differenzierbar mit $\psi'(0) = EX$ und $\psi''(0) = D^2X$.
   ψ_F heißt Kumulantenfunktion der Verteilungsfunktion F.

   c) Durch
   $F_u(x) := \int_{-\infty}^{x} \exp[ux - \psi_F(u)]dF(x)$
   ist eine Familie $(F_u | u \in I_F)$ von Verteilungsfunktionen definiert, die sogenannte von F erzeugte Exponentialfamilie.

   d) Man berechne Erwartungswert und Streuung von X bezüglich F_u.

   e) Man gebe die von folgenden Verteilungsfunktionen erzeugten Exponentialfamilien an:
   $\text{Exp}(\lambda)$, Poisson $(\lambda), \Gamma(\alpha, \lambda), \text{N}(\mu, \sigma^2)$

2. Der Poissonprozess $(N_t, t \geq 0)$ mit dem Parameter $\lambda > 0$ ist ein stochastischer Prozess mit

   a) $N_0 = 0 \quad P_\lambda$-fast sicher

   b) Für alle $t_0, t_1, \cdots, t_n$ mit $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ sind die Zuwächse $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}, k = 1, \cdots, n$ voneinander unabhängig.

   c) $N_t - N_s \sim$ Poisson $(\lambda(t - s))$.
   Man berechne für $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ die Wahrscheinlichkeiten
   $P_\lambda(N_{t_1} = i_1, \cdots, N_{t_n} = i_n)$ und $P_\lambda(N_s = i | N_t = j)$.

d) Mit Hilfe beobachteter Werte N_s, $s \leq t$ konstruiere man einen Schätzer für λ.

3. Es sei g eine reellwertige konvexe Funktion auf einem Intervall I der reellen Achse. Die Youngtransformierte h von g ist definiert durch $h(a) := \sup_{u \in I}[ua - g(u)], \quad a \in R_1$.

   a) Man zeige, dass h eine konvexe Funktion auf R_1 ist.

   b) Man berechne h für den Fall $g(u) = \frac{|u|^p}{p}$ (p sei größer als Eins).
   Die Youngtransformierte der Kumulantenfunktion ψ_F heißt Cramertransformierte von F und werde mit h_F bezeichnet.

   c) Man berechne h_F für den Fall, dass X zweipunktverteilt ist mit
   $P(X = 1) = p, P(X - 0) = 1 - p, \quad p \in (0, 1)$.