Prof. Dr. Uwe Küchler

Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

4. Übung, 13. 06. 2005

1. Es seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $R := \frac{P+Q}{2}$. Man zeige, dass folgende Eigenschaften gelten:

   a) P und Q sind absolutstetig bzgl. R,

   b) bezeichnet U die Radon-Nikodym-Ableitung $\frac{dQ}{dR}$, so gilt
   $0 \leq U \leq 2, R$-fast sicher

   c) $P(U = 2) = Q(U = 0) = 0$

   d) Für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt:
   $$\int_A U dP = \int_A (2 - U) dQ$$
   (Hinweis: Nach Definition gilt für alle $A, B \in \mathfrak{A}$
   $$\int_A 1\!\!\mathrm{I}_B dP = P(A \cap B) = \int_A (2 - U) 1\!\!\mathrm{I}_B dR, \text{ d. h.}$$
   $$\int_A Z dP = \int_A (2 - U) Z dR \qquad (*)$$
   für alle A und alle Indikatorfunktionen Z. Somit auch für alle nichtnegativen meßbaren Z, insbesondere für $Z = U$.)

   e) Es gilt $Q << P$ genau dann, wenn $Q(U = 2) = 0$ erfüllt ist. In diesem Fall haben wir mit
   $L := \frac{dQ}{dP}$
   die Gleichung $L(\omega) = \frac{U(\omega)}{2 - U(\omega)}$ für R-fast alle ω.
   Außerdem gilt $E_p L = 1$.
   (Man setze $Z = \frac{U}{2-U}$ in $(*)$ ein und überzeuge sich davon, dass im Fall $Q << P$) das Ereignis $\{U = 2\}$ eine R-Nullmenge ist.)

2. Es sei X eine Zufallsgröße mit Werten in $[0,1)$, die gemäß der Dichtefunktion $f_X(x) = 2x1\!\!\mathrm{I}_{[0,1]}(x)$ verteilt ist. Ferner sei $I_{k,j} := [k2^{-j},(k+1)2^{-j})$ sowie $\mathcal{F}_j := \sigma(\{X \in I_{k,j}\}, k = 0,\cdots,2^j-1)$. Zeigen Sie, dass die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_j]$ $\mathbb{P}$-fast sicher eine deterministische Funktion g_j von X ist, die konstante Werte auf $I_{k,j}$ annimmt für alle $k = 0,\cdots,2^j-1$. Bestimmen Sie die jeweilige Konstante und zeichnen Sie g_j für $j = 1,2,3,4$ in ein Koordinatensystem. Existiert der Grenzwert $\lim_{j\to\infty} g_j$, und wenn ja, in welchem Sinn?

3. Es sei $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ ein statistisches Modell mit $\mathcal{P} = (P_\vartheta, \vartheta \in \Theta)$ und mit einem dominierenden Wahrscheinlichkeitsmaß P_0. Weiterhin bezeichne $L(\vartheta)$ die Likelihoodfunktion (Radon-Nikodym-Ableitung) $L(\vartheta) = \frac{dP_\vartheta}{dP_0}$ sowie $\mathcal{H}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$.
Zeigen Sie, dass für jede positive Zufallsgröße Y P_0-fast sicher gilt

$$E_\vartheta[Y|\mathcal{H}] = \begin{cases} \frac{E_0[L(\vartheta)Y|\mathcal{H}]}{E_0[L(\vartheta)|\mathcal{H}]} & \text{auf } \{E_0[L(\vartheta)|\mathcal{H}] > 0\}, \\ 0 & \text{auf } \{E_0[L(\vartheta)|\mathcal{H}] = 0\}. \end{cases}$$

Hinweis: Man benutze die Formel (4.7) des Vorlesungsskriptes:

$$\frac{dP_\vartheta|_\mathcal{H}}{dP_0|_\mathcal{H}} = E_0(L|\mathcal{H}).$$