Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

6. Übung, 11. 07. 2005

1. Es sei $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ eine mathematische Stichprobe aus einer auf $[0, \vartheta] (\vartheta > 0)$ gleichmäßig verteilten Grundgesamtheit. Man gebe eine minimal suffiziente Statistik an, die vollständig ist.

2. Es sei $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ eine mathematische Stichprobe aus einer auf $[\vartheta - \frac{1}{2}, \vartheta + \frac{1}{2}]$-gleichmäßig verteilten Grundgesamtheit. Zeigen Sie, dass mit $M_n := \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ und $m_n := \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$
die Verteilung der Zufallsgröße $M_n - m_n$ nicht von ϑ abhängt und dass (m_n, M_n) minimal suffizient aber nicht vollständig ist.

3. Angenommen, $\bar{p} := (p_i, i \in E)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $E = \{1, 2, \cdots, k\}$. Es sei $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ eine mathematische Stichprobe aus einer nach $\bar{p}$ verteilten Grundgesamtheit.
Man konstruiere eine Exponentialfamilie in der Menge aller $\bar{p}$ und gebe eine minimal suffiziente und vollständige Statistik für sie an.
Man löse die gleiche Aufgabe, falls $X = (X_0, X_1, \cdots, X_n)$ eine Markovsche Kette mit der Anfangsverteilung $\bar{p}$ und der Übergangsmatrix $\pi = (\pi_{ij})_{i,j \in E}$ bildet. Gesucht ist also eine Exponentialfamilie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf E^{n+1}, so dass jede die Folge X zu einer Markovschen Kette mit einer Anfangsverteilung ϱ und einer Übergangsmatrix (p_{ij}) macht.

4. Es sei $X = (X(t), t \geq 0)$ ein zusammengesetzter Poissonprozess über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, d. h., es gelte

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k,$$

wobei $N = (N(t), t \geq 0)$ ein Poissonprozess mit dem Parameter $\lambda > 0$ ist, und $Y = (Y_k, k \geq 1)$ unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen mit der Verteilungsfunktion F sind. N und Y sind voneinander unabhängig.
Konstruieren Sie die von X erzeugte Exponentialfamilie $(P^{(u)}, u \in I)$. Zeigen Sie, dass X unter dem Maß $P^{(u)}$ wieder ein zusammengesetzter Poissonprozess ist und berechnen Sie seine Kenngrößen $\lambda^{(u)}$ und $F^{(u)}$.