Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

WS 2005/06

Stochastische Differentialgleichungen

1. Übung, 17. 10. 2005

1. Es sei A eine mit dem Parameter $\mu > 0$ exponentialverteilte Zufallsgröße über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Man löse die Differentialgleichung
$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\omega)X(t), \quad X(0) = 1$$
für jedes $\omega \in \Omega$ berechne $m(t) := EX(t)$. Welcher Differentialgleichung genügt die Erwartungswertfunktion $m(t), t \geq 0$?

2. Es seien $W := (W_1, W_2, \cdots, W_n)$ ein standardnormalverteilter Vektor $(n \geq 2)$ und $X_k := \sum\limits_{j=1}^{k} W_j, k = 1, 2, \cdots, n$. Man berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X := (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ und bestimme den Erwartungswertvektor EX und die Kovarianzmatrix $\sum$ von X.

3. Für jedes $n \geq 1$ seien $(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \cdots, X_n^{(n)})$ voneinander unabhängige $N(0, \frac{1}{n})$-verteilte Zufallsgrößen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Man bestimme
$$E\Big(\sum_{k=1}^{n} (X_k^{(n)})^2\Big) \text{ und } Var\Big(\sum_{k=1}^{n} (X_k^{(n)})^2\Big)$$
. Wie verhalten sich diese Werte für $n \to \infty$? Was kann man daraus für das Konvergenzverhalten von $\sum\limits_{k=1}^{n} (X_k^{(n)})^2$ für $n \to \infty$ ableiten?

4. Es seien f und g zwei reellwertige Funktionen auf $[a, b]$.

   Man zeige: Existiert eines der beiden Riemann-Stieltjes Integrale $\int\limits_a^b f(s)dg(s)$ oder $\int\limits_a^b g(s)df(s)$, so existiert auch das andere, und es gilt
$$\int_a^b f(s)dg(s) + \int_a^b g(s)df(s) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

5. Zeigen Sie, dass für die Dichte $\varphi_t(x)$ der Normalverteilung

$$\varphi_t(x) = (2\pi\sigma^2 t)^{-\frac{1}{2}} \exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2 t}(x-\mu t)^2\Big]\ ,\ t > 0, x \in R_1$$

folgende Gleichungen gelten

a) $\int\limits_{R_1} \varphi_t(x)\varphi_s(y-x)dx = \varphi_{s+t}(y)\ ,\ s,t > 0, y \in R_1$

b) $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_t(x) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\ ,\ t > 0, x \in R_1$