

Stochastische Differentialgleichungen

2. Übung, 31. 10. 2005

1. Es seien $(W(t), t \geq 0)$ ein Standard-Wienerprozeß über (Ω, \mathcal{F}, P) und $\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s, s \leq t), t \geq 0$. Man zeige: Durch

$$\mathcal{F}_{t+}^W := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^W, t \geq 0 \text{ und } \mathcal{F}_{t-}^W := \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s^W, t > 0, \mathcal{F}_{0-}^W := \mathcal{F}_0^W$$

sind Filtrationen (\mathcal{F}_{t-}^W) und (\mathcal{F}_{t+}^W) definiert mit den Eigenschaften

- $\mathcal{F}_s^W \subseteq \mathcal{F}_{t-}^W \subseteq \mathcal{F}_t^W \subseteq \mathcal{F}_{t+}^W \subseteq \mathcal{F}_u^W$ für alle s, t, u mit $s < t < u$.
- Die Filtration (\mathcal{F}_{t+}^W) ist rechtsstetig.
- $\{W_{t+\frac{1}{n}} = W_t \text{ für unendlich viele } n \geq 1\} \in \mathcal{F}_{t+}^W \setminus \mathcal{F}_t^W$.
- Für jedes $s > 0$ ist $(W(s+t) - W(s), t \geq 0)$ ein Standard-Wienerprozeß. Er ist unabhängig von \mathcal{F}_{s+}^W .
- Folgende Prozesse sind ebenfalls Standard-Wienerprozeße:

$$(-W(t), t \geq 0), (tW(\frac{1}{t}), t > 0, W_0 = 0).$$

- $(W^2(t), t \geq 0)$ ist ein Submartingal und $(W^2(t) - t, t \geq 0)$ ist ein Martingal.

2. Es sei $(W(t), t \geq 0)$ ein Wienerprozeß mit den Parametern μ und σ^2 . Man beweise:

- Die quadratische Variation $\langle W \rangle_t$ ist gleich $\sigma^2 t$.
- Ist $a > 0$ und $\tau_a(\omega) := \inf\{t > 0 \mid W(t) \geq a\}$, so gilt

$$\{\tau_a < t\} \in \mathcal{F}_t^W, t > 0.$$