Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

WS 2005/06

Stochastische Differentialgleichungen

2. Übung, 31. 10. 2005

1. Es seien $(W(t), t \geq 0)$ ein Standard-Wienerprozeß über $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s, s \leq t), t \geq 0$. Man zeige: Durch

$$\mathcal{F}_{t+}^W := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^W, t \geq 0 \text{ und } \mathcal{F}_{t-}^W := \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s^W \ , t > 0,\ \mathcal{F}_{0-}^W := \mathcal{F}_0^W$$

sind Filtrationen $(\mathcal{F}_{t-}^W)$ und $(\mathcal{F}_{t+}^W)$ definiert mit den Eigenschaften

a) $\mathcal{F}_s^W \subseteq \mathcal{F}_{t-}^W \subseteq \mathcal{F}_t^W \subseteq \mathcal{F}_{t+}^W \subseteq \mathcal{F}_u^W$ für alle s, t, u mit $s < t < u$.

b) Die Filtration $(\mathcal{F}_{t+}^W)$ ist rechtsstetig.

c) $\{W_{t+\frac{1}{n}} = W_t$ für unendlich viele $n \geq 1\} \in \mathcal{F}_{t+}^W \backslash \mathcal{F}_t^W$.

d) Für jedes $s > 0$ ist $(W(s+t) - W(s),\ t \geq 0)$ ein Standard-Wienerprozeß. Er ist unabhängig von $\mathcal{F}_{s+}^W$.

e) Folgende Prozesse sind ebenfalls Standard-Wienerprozeße:

$$(-W(t), t \geq 0),\ (tW(\frac{1}{t}), t > 0, W_0 = 0).$$

f) $(W^2(t), t \geq 0)$ ist ein Submartingal und $(W^2(t) - t, t \geq 0)$ ist ein Martingal.

2. Es sei $(W(t), t \geq 0)$ ein Wienerprozeß mit den Parametern μ und σ^2. Man beweise:

a) Die quadratische Variation $< W >_t$ ist gleich $\sigma^2 t$.

b) Ist $a > 0$ und $\tau_a(\omega) := \inf\{t > 0 \,|\, W(t) \geq a\}$, so gilt

$$\{\tau_a < t\} \in \mathcal{F}_t^W,\ t > 0.$$