Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

WS 2005/06

Stochastische Differentialgleichungen

5. Übung, 12. 12. 2005

1.* Es sei $\big(Y_t,\ t \in [a,b]\big)$ ein Itô-Prozeß und X_a eine $\mathscr{F}_a$-meßbare Zufallsgröße. Beweisen Sie, daß gilt:

$$\int_a^b X_a \, dY_s = X_a \int_a^b dY_s = X_a(Y_b - Y_a).$$

2.* Berechnen Sie die iterierten Itô-Integrale

$$\int_0^t \left(\int_0^s dW_u \right) dW_s, \qquad \int_0^t \left(\int_0^s \left(\int_0^u dW_v \right) dW_u \right) dW_s.$$

3. Es seien f eine auf $[a,b]$ definierte stetig differenzierbare Funktion und $\vartheta \in [0,1]$ fest gewählt. Man zeige, daß für jede Zerlegungsfolge $\Pi_n := \left(t_0^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}\right)$ von $[a,b]$ (d.h. $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{m_n}^{(n)} = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\Pi_n) = \max\left\{ (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \mid k = 0, 1, \dots, m_n - 1 \right\} = 0$) die Summen

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} f\left(W_{t_k^{(n)} + \vartheta \Delta t_k^{(n)}}\right)\left(W_{t_{k+1}^{(n)}} - W_{t_k^{(n)}}\right) \qquad (\Delta t_k^{(n)} := t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})$$

im $L^2(I\!P)$-Sinne gegen eine Zufallsgröße $I_f^{(\vartheta)}$ konvergieren. Für $\vartheta = 0$ ergibt sich das Itô-Integral $I_f^{(0)} = \int_a^b f(W_s)\, dW_s$.
Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen $I_f^{(\vartheta)}$ und $I_f^{(0)}$. Formulieren Sie die Itôformel für $f(W_t)$ unter Verwendung des Integrals $I_f^{(\vartheta)}$.
Die Zufallsgröße $I_f^{(\frac{1}{2})}$ heißt Stratonovich-Integral von $t \to f(W_t)$ bezüglich (W_t). Wodurch zeichnet es sich aus?

4.* Es seien $g \in \mathscr{L}^2_\omega([0,\infty))$ und

$$Y_t := \exp\left\{\int_0^t g_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t g_s^2\,ds\right\}, \quad t \geq 0.$$

Man zeige, daß das Differenzial von (Y_t) gegeben ist durch

$$dY_t = g_t Y_t\,dW_t, \quad t \geq 0,\ Y_0 = 1.$$

5. Es seien $\varepsilon > 0$ und f_ε die durch

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} |x|, & \text{falls } |x| \geq \varepsilon, \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon}\right), & \text{falls } |x| < \varepsilon \end{cases}$$

definierte Funktion auf $\mathbb{R}$, λ bezeichne das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Man zeige:

(a) $f_\varepsilon(W_t) = \int_0^t f'_\varepsilon(W_s)\,dW_s + \frac{1}{2\varepsilon}\lambda\left(\{s \leq t : |W_s| < \varepsilon\}\right), \quad t \geq 0,$

(b) $\int_0^t f'_\varepsilon(W_s)\mathbb{1}_{[0,\varepsilon)}(W_s)\,dW_s \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} 0$ im $L^2(\mathbb{P})$ Sinne,

(c) $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\lambda\left(\{s \leq t : |W_s| < \varepsilon\}\right) =: L_t$

existiert im $L^2(\mathbb{P})$-Sinne und heißt die *lokale Zeit des Wienerschen Prozesses bei 0 zur Zeit t*,

(d) $|W_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s)\,dW_s + L_t.$ (Tanaka-Formel)