Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.Math. Hagen Gilsing

Wintersemester 2007/2008

Risikotheorie

4. Übungsserie

4.1 (2 Punkte) Man sagt, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{p} = (p_k)$ für $k \geq 1$ gehört zur Klasse $(a, b, 1)$, falls es Zahlen a und b gibt mit

$$p_k = (a + \frac{b}{k})p_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Man zeige, dass folgende Verteilungen zur $(a, b, 1)$-Klasse gehören:

i) die logarithmische Verteilung

$$p_k = \frac{p^k}{k} \frac{1}{ln(1-p)}, \; k \geq 1, \quad p \in (0,1),$$

ii) die erweiterte abgeschnittene Negative Binomialverteilung

$$p_k = \frac{\binom{\nu+k-1}{k} p^k (1-p)^\nu}{1-(1-p)^\nu} \quad , \quad k \geq 1, \; \nu > -1, \; p \in (0,1).$$

4.2 (4 Punkte) Es sei $\varphi(s), |s| \leq 1$, die erzeugende Funktion einer zusammengesetzten Schadenanzahlverteilung $\mathbf{p} = (p_k)$ und es gelte

$$\varphi(s) = \varphi_q(\varphi_r(s)), \quad |s| \leq 1,$$

wobei φ_q, φ_r die erzeugende Funtion zweier Verteilungen $\mathbf{q} = (q_k)$ bzw. $\mathbf{r} = (r_k)$ auf $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n \ldots\}$ seien.
Man berechne die Kumulanten $\kappa_1^{(\mathbf{p})}, \ldots, \kappa_4^{(\mathbf{p})}$ von p auf der Basis von $\kappa_i^{(\mathbf{q})}, \kappa_i^{(\mathbf{r})}, \quad i = 1, 2, 3, 4$.

4.3 a) (2 Punkte) Es sei Z eine Zufallsgröße über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und h eine streng wachsende nichtnegative Funktion auf R. Dann gilt für alle $c > 0$

$$P(Z \geq c) \leq \frac{Eh(Z)}{h(c)}.$$

b) (4 Punkte) (Cantellis Ungleichung) Ist Z eine Zufallsgröße über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $EZ^2 < \infty$, so gilt

$$P(Z \geq EZ + c) \leq \frac{Var(Z)}{c^2 + Var(Z)}$$

für alle $c > 0$.