Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Risikotheorie

5. Übungsserie

5.1 a) Eine Verteilungsfunktion F auf $[0,\infty)$ besitzt eine schwere Flanke (heavy tail), falls

$$\int_0^\infty e^{st}F(dt) = \infty \quad \text{für alle } s > 0$$

gilt. Wir definieren durch $R(t) := -\ln(1-F(t))$ die sogenannte *hazard function*. Zeigen Sie, dass eine Verteilungsfunktion F auf $[0,\infty)$ mit

$$\alpha_F := \limsup_{t\to\infty} \tfrac{R(t)}{t} = 0$$

eine schwere Flanke hat.

b) Eine Verteilungsfunktion F auf $[0,\infty)$ heißt subexponentiell, falls

$$\lim_{t\uparrow\infty} \tfrac{1-F*F(t)}{1-F(t)} = 2$$

gilt. Beweisen Sie für eine subexponentielle Verteilungsfunktion F die folgenden Aussagen:

i) $\lim_{t\uparrow\infty} \frac{1-F(t-t_0)}{1-F(t)} = 1$ für alle $t_0 > 0$

ii) F besitzt eine schwere Flanke.

c) Zeigen Sie, dass jede Verteilungfunktion F vom Pareto-Typ subexponentiell ist, also insbesondere eine schwere Flanke hat.

5.2 Die Verteilungsfunktion F der *Weibull-Verteilung* mit den Parametern $\alpha, \beta > 0$ besitzt die Form $F(x) = (1-\exp(-\alpha x^\beta))1_{(0,\infty)}(x)$. Zeigen Sie, dass F für $\beta \in (0,1)$ eine schwere Flanke hat.

5.3 Es seien $Y_k, k \geq 1$, unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $(0,\infty]$. Wir setzen

$$S_0 := 0, S_n := \Sigma_{k=1}^n Y_k, F(x) := P(Y_1 \leq x), x \in \mathbb{R}, \|F\| := \lim_{x\to\infty} F(x) = P(Y_1 < \infty).$$

Man definiert den *Erneuerungsprozess* N durch

$$N_t = \sum_{k=0}^\infty 1_{[0,t]}(S_k), \quad t \geq 0.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$ bestehen die Identitäten

$$\{N_t > n\} = \{S_n \leq t\}, \ \{N_t = n+1\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}.$$

b) Für alle $t \geq 0$ gilt $E(N_t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leq t)$.

c) Aus der Ungleichung $E(\exp(-S_m)) \geq e^{-t} P(S_m \leq t)$ (Begründung?) und der Darstellung in b) folgt, dass $E(N_t)$ für alle $t \geq 0$ endlich ist.

d) Die einzige auf endlichen Intervallen beschränkte Lösung $(U(t), t \geq 0)$ der *Erneuerungsgleichung*

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-y)F(dy), \quad t \geq 0,$$

ist die Erwartungswertfunktion $U(t) = E(N_t)$.

e) Es gilt das Gesetz der großen Zahlen $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{E(Y_1)}$ P-f. s..

5.4 (3 Punkte) Wir erweitern Aufgabe 5.3.

a) Es sei $\|F\| = 1$. Man zeige:

$$P(S_n < \infty) = 1, n \geq 1, \text{ und } P(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1.$$

b) Im Fall $\|F\| < 1$ definieren wir $\sigma := \min\{k \geq 0 | Y_{k+1} = \infty\}$. Ist σ eine Stoppzeit?

   i) Man bestimme die Verteilung von σ.

   ii) Man zeige, dass für die Verteilung von S_σ gilt

$$P(S_\sigma \leq t) = U(t)(1 - \|F\|), \quad t \geq 0.$$

5.5 (5 Punkte)

a) Fassen Sie die in der Vorlesung eingeführte Überlebensfunktion Φ als Verteilungsfunktion auf, und berechnen Sie die zugehörige Laplace-Transformierte.

b) Zeigen Sie mithilfe von a), dass Φ die Verteilungsfunktion einer zusammengesetzten geometrischen Verteilung ist, d. h. es gilt

$$\Phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-q)q^n G^{*(n)}(u), \quad u \in \mathbb{R},$$

sofern $q = \frac{\lambda\mu}{c}$ gesetzt wird und G die Verteilungsfunktion mit der Dichte

$$g(x) = \frac{1-F(x)}{\mu} 1_{[0,\infty)}(x)$$

ist.

Hinweis: Mit partieller Integration folgt $\frac{L_F(v)}{v} = \int_0^\infty e^{-vu} F(u)du$.

5.6 (4 Punkte) Es sei F die Verteilungsfunktion einer positiven Zufallsgröße mit existierendem Erwartungswert und $F(x) \in (0,1)$ für alle $x > 0$. Die durch

$$e_F(x) = E(X - x|X > x), \quad x > 0,$$

definierte Funktion heißt *mean excess function*. Zeigen Sie:

a) Für alle $x > 0$ gilt $e_F(x) = \frac{1}{1-F(x)} \int_x^\infty (1 - F(y))\, dy$.

b) Ist F außerdem stetig, so erhält man

$$1 - F(x) = \frac{e_F(0)}{e_F(x)} \exp(-\int_0^x \frac{1}{e_F(y)}\, dy) \quad \text{für alle } x > 0.$$

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Mittwoch, dem 7.01.2009, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.