Rechnet mein Computer richtig?

René Lamour
Humboldt-Universität zu Berlin

22. April 2008

Taschenrechner und PCs erlauben (rechnerisch) anspruchsvolle Aufgaben zu lösen.

Taschenrechner und PCs erlauben (rechnerisch) anspruchsvolle Aufgaben zu lösen.
Bekommt jeder (egal auf welchen Weg) immer das Gleiche heraus?

Taschenrechner und PCs erlauben (rechnerisch) anspruchsvolle Aufgaben zu lösen.
Bekommt jeder (egal auf welchen Weg) immer das Gleiche heraus?
Ist das (Taschenrechner-) Ergebnis überhaupt richtig?

Taschenrechner und PCs erlauben (rechnerisch) anspruchsvolle Aufgaben zu lösen.
Bekommt jeder (egal auf welchen Weg) immer das Gleiche heraus?
Ist das (Taschenrechner-) Ergebnis überhaupt richtig?
Sehen wir uns ein Beispiel an!

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} \qquad \text{für } a = 10^5 \text{ und } b = 10^{-4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} \qquad \text{für } a = 10^5 \text{ und } b = 10^{-4}$$

$$= 6329113.924$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} \qquad \text{für } a = 10^5 \text{ und } b = 10^{-4}$$

$$= 6329113.924$$

$$= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} \qquad \text{für } a = 10^5 \text{ und } b = 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} &= 6329113.924 \\ &= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})} \\ &= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} \qquad \text{für } a = 10^5 \text{ und } b = 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}
&= 6329113.924 \\
&= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b} \\
&= 6324555.322
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}} \qquad \text{für } a = 10^5 \text{ und } b = 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}
&= 6329113.924 \\
&= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})} \\
&= \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b} \\
&= 6324555.322
\end{aligned}$$

Das ist ein Unterschied von 4558.60208 bei mathematisch identischen Ausdrücken!
Die vierte Stelle ist falsch bei 10-stelliger Anzeige

Was ist anders bei der Computerrechnung?

Was ist anders bei der Computerrechnung?

Wir verwenden keine reellen Zahlen mehr, sondern Gleitkommazahlen.

Was ist anders bei der Computerrechnung?

Wir verwenden keine reellen Zahlen mehr, sondern normalisierte Gleitkommazahlen.

Was ist anders bei der Computerrechnung?

Wir verwenden keine reellen Zahlen mehr, sondern normalisierte Gleitkommazahlen.

Beispiel: $\pm 0.222029388 \cdot 10^{\pm 9}$

Was ist anders bei der Computerrechnung?

Wir verwenden keine reellen Zahlen mehr, sondern normalisierte Gleitkommazahlen.

Beispiel: $\pm 0.222029388 \cdot 10^{\pm 9}$

Wichtig für die Genauigkeit ist die Mantissenlänge - die Anzahl der Ziffern nach dem Komma.

Was ist anders bei der Computerrechnung?

Wir verwenden keine reellen Zahlen mehr, sondern normalisierte Gleitkommazahlen.

Beispiel: $\pm 0.222029388 \cdot 10^{\pm 9}$

Wichtig für die Genauigkeit ist die Mantissenlänge - die Anzahl der Ziffern nach dem Komma.

Für Festkommazahlen bedeutet Mantissenlänge die Anzahl der mitgeführten gültigen Ziffern:

Was ist anders bei der Computerrechnung?

Wir verwenden keine reellen Zahlen mehr, sondern normalisierte Gleitkommazahlen.

Beispiel: $\pm 0.222029388 \cdot 10^{\pm 9}$

Wichtig für die Genauigkeit ist die Mantissenlänge - die Anzahl der Ziffern nach dem Komma.

Für Festkommazahlen bedeutet Mantissenlänge die Anzahl der mitgeführten gültigen Ziffern:

$$
\begin{array}{l}
12300. \\
1.23 \\
0.000123
\end{array}
$$

Mit welcher Mantissenlänge rechnet mein Taschenrechner?

Mit welcher Mantissenlänge rechnet mein Taschenrechner? Wir testen, wann

$$(1 + \varepsilon) = 1$$

mit $1 \gg \varepsilon > 0$.

Mit welcher Mantissenlänge rechnet mein Taschenrechner? Wir testen, wann

$$(1 + \varepsilon) = 1$$

mit $1 \gg \varepsilon > 0$.

$$1.\overbrace{0000000000000|00000|}^{\text{Mantissenlänge}-1\text{ Stellen}}$$

Mit welcher Mantissenlänge rechnet mein Taschenrechner? Wir testen, wann

$$(1 + \varepsilon) = 1$$

mit $1 \gg \varepsilon > 0$.

$$\begin{array}{r@{}l}
1. & \overbrace{0000000000000|00000|}^{\text{Mantissenlänge}-1 \text{ Stellen}} \\
+\,0. & 0000001 \qquad\qquad\quad |
\end{array}$$

Mit welcher Mantissenlänge rechnet mein Taschenrechner? Wir testen, wann

$$(1+\varepsilon) = 1$$

mit $1 \gg \varepsilon > 0$.

$$1.\overbrace{0000000000000|00000|}^{\text{Mantissenlänge}-1\text{ Stellen}}$$

$$+\,0.0000000000000|01\qquad|$$

Mit welcher Mantissenlänge rechnet mein Taschenrechner? Wir testen, wann

$$(1 + \varepsilon) = 1$$

mit $1 \gg \varepsilon > 0$.

$$1.\overbrace{0000000000000|00000|}^{\text{Mantissenlänge}-1\text{ Stellen}}$$

$$+\,0.0000000000000|00000|1$$

Mit welcher Mantissenlänge rechnet mein Taschenrechner? Wir testen, wann

$$(1+\varepsilon) = 1$$

mit $1 \gg \varepsilon > 0$.

$$1.\overbrace{0000000000000|00000|}^{\text{Mantissenlänge}-1\text{ Stellen}}$$

$$+\,0.0000000000000|00000|1 = 10^{-\text{Mantissenlänge}}$$

Mit welcher Mantissenlänge rechnet mein Taschenrechner? Wir testen, wann

$$(1+\varepsilon) = 1$$

mit $1 \gg \varepsilon > 0$.

$$1.\overbrace{0000000000000|00000|}^{\text{Mantissenlänge}-1 \text{ Stellen}}$$

$$+\,0.0000000000000|00000|1 = 10^{-\text{Mantissenlänge}}$$

Wir testen $(1+10^{-s}) - 1 =?$

Mit welcher Mantissenlänge rechnet mein Taschenrechner? Wir testen, wann

$$(1+\varepsilon) = 1$$

mit $1 \gg \varepsilon > 0$.

$$1.\overbrace{0000000000000|00000|}^{\text{Mantissenlänge}-1\text{ Stellen}}$$

$$+\,0.0000000000000|00000|1 = 10^{-\text{Mantissenlänge}}$$

Wir testen $(1+10^{-s}) - 1 =?$
Mein Taschenrechner hat 10 angezeigte Stellen, aber 11 Mantissenstellen.

Es gelten nicht: Assoziativgesetz und Distributivgesetz

Es gelten nicht: Assoziativgesetz und Distributivgesetz

$$(\varepsilon + 1) - 1 \neq \varepsilon + (1 - 1)$$

Es gelten nicht: Assoziativgesetz und Distributivgesetz

$$(\varepsilon + 1) - 1 \neq \varepsilon + (1 - 1)$$

Kommt daher das schlechte Ergebnis des Beispiels?

Es gelten nicht: Assoziativgesetz und Distributivgesetz

$$(\varepsilon + 1) - 1 \neq \varepsilon + (1 - 1)$$

Kommt daher das schlechte Ergebnis des Beispiels?

Durch notwendige Rundung werden Fehler gemacht. Wie wirken sich diese Fehler auf ein Berechnungsergebnis aus?

Es gelten nicht: Assoziativgesetz und Distributivgesetz

$$(\varepsilon + 1) - 1 \neq \varepsilon + (1 - 1)$$

Kommt daher das schlechte Ergebnis des Beispiels?

Durch notwendige Rundung werden Fehler gemacht. Wie wirken sich diese Fehler auf ein Berechnungsergebnis aus?

Betrachten wir die Berechnung eines Funktionswertes y einer Funktion f mit

$$y = f(d), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad d \in \mathbb{R}^n.$$

Es gelten nicht: Assoziativgesetz und Distributivgesetz

$$(\varepsilon + 1) - 1 \neq \varepsilon + (1 - 1)$$

Kommt daher das schlechte Ergebnis des Beispiels?

Durch notwendige Rundung werden Fehler gemacht. Wie wirken sich diese Fehler auf ein Berechnungsergebnis aus?

Betrachten wir die Berechnung eines Funktionswertes y einer Funktion f mit

$$y = f(d), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad d \in \mathbb{R}^n.$$

Wir wollen die Abhängigkeit des relativen Fehlers von y vom relativen Fehler von d untersuchen.

Wir betrachten für festes d und einen festen Fehlervektor $\triangle d$ die skalare Funktion

$$F(s) := f(d + s\triangle d).$$

Wir betrachten für festes d und einen festen Fehlervektor $\triangle d$ die skalare Funktion

$$F(s) := f(d + s\triangle d).$$

Für F gilt der Mittelwertsatz

Wir betrachten für festes d und einen festen Fehlervektor $\triangle d$ die skalare Funktion

$$F(s) := f(d + s\triangle d).$$

Für F gilt der Mittelwertsatz und daher

$$F(1) - F(0) = f(d + \triangle d) - f(d) = F'(\theta)(1 - 0).$$

Wir betrachten für festes d und einen festen Fehlervektor $\triangle d$ die skalare Funktion

$$F(s) := f(d + s\triangle d).$$

Für F gilt der Mittelwertsatz und daher

$$F(1) - F(0) = f(d + \triangle d) - f(d) = F'(\theta)(1 - 0).$$

$$F'(\theta) = f'(d + \theta \triangle d) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(d+\theta\triangle d)}{\partial d_1} & \dots & \frac{\partial f(d+\theta\triangle d)}{\partial d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle d_1 \\ \vdots \\ \triangle d_n \end{pmatrix}.$$

$$\triangle y = f(d + \triangle d) - f(d)$$

$$
\begin{aligned}
\triangle y &= f(d + \triangle d) - f(d) \\
&= f'(d + \theta \triangle d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\triangle y &= f(d + \triangle d) - f(d) \\
&= f'(d + \theta \triangle d) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle d_1 \\ \vdots \\ \triangle d_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\triangle y &= f(d + \triangle d) - f(d) \\
&= f'(d + \theta \triangle d) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle d_1 \\ \vdots \\ \triangle d_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial d_i} \triangle d_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\triangle y &= f(d + \triangle d) - f(d) \\
&= f'(d + \theta \triangle d) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle d_1 \\ \vdots \\ \triangle d_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial d_i} \triangle d_i = \sum_{i=1}^{n} {\color{green} d_i} \frac{\partial f}{\partial d_i} \frac{\triangle d_i}{{\color{green} d_i}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\triangle y &= f(d+\triangle d) - f(d) \\
&= f'(d+\theta \triangle d) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle d_1 \\ \vdots \\ \triangle d_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial d_i} \triangle d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial f}{\partial d_i} \frac{\triangle d_i}{d_i}
\end{aligned}
$$

Wegen $y = f(d)$ ist für $y \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\triangle y &= f(d + \triangle d) - f(d) \\
&= f'(d + \theta \triangle d) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle d_1 \\ \vdots \\ \triangle d_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial d_i} \triangle d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial f}{\partial d_i} \frac{\triangle d_i}{d_i}
\end{aligned}
$$

Wegen $y = f(d)$ ist für $y \neq 0$

$$
\frac{\triangle y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_i} \frac{\triangle d_i}{d_i}
$$

$$\begin{aligned}\triangle y &= f(d + \triangle d) - f(d)\\ &= f'(d + \theta \triangle d)\\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial d_n}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\triangle d_1\\ \vdots\\ \triangle d_n\end{pmatrix}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial d_i} \triangle d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial f}{\partial d_i} \frac{\triangle d_i}{d_i}\end{aligned}$$

Wegen $y = f(d)$ ist für $y \neq 0$

$$\frac{\triangle y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_i} \frac{\triangle d_i}{d_i} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \cdots & \frac{d_n}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_n}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{\triangle d_1}{d_1}\\ \vdots\\ \frac{\triangle d_n}{d_n}\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\triangle\, y &= f(d + \triangle d) - f(d)\\
&= f'(d + \theta \triangle d)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle d_1 \\ \vdots \\ \triangle d_n \end{pmatrix}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial d_i} \triangle\, d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{\partial f}{\partial d_i} \frac{\triangle d_i}{d_i}
\end{aligned}
$$

Wegen $y = f(d)$ ist für $y \neq 0$

$$
\frac{\triangle y}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_i} \frac{\triangle d_i}{d_i} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \cdots & \frac{d_n}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\triangle d_1}{d_1} \\ \vdots \\ \frac{\triangle d_n}{d_n} \end{pmatrix}
$$

$$
\frac{|\triangle\, y|}{|y|} \leqslant \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} \frac{d_1}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_1} & \cdots & \frac{d_n}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_n} \end{pmatrix} \right\|}_{:=K \text{ - relative Kondition}} \left\| \begin{pmatrix} \frac{\triangle d_1}{d_1} \\ \vdots \\ \frac{\triangle d_n}{d_n} \end{pmatrix} \right\|
$$

Die Norm $\|.\|$ ist eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

1. $\|v\| \geq 0, \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Die Norm $\|.\|$ ist eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

1. $\|v\| \geq 0, \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Sind y und v (Spalten)Vektoren und falls $y = Av$ soll gelten $\|y\| \leq \|A\| \|v\|$, dann heisst $\|.\|$ passend zu $\|.\|$.

Die Norm $\|.\|$ ist eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

1. $\|v\| \geq 0, \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Sind y und v (Spalten)Vektoren und falls $y = Av$ soll gelten $\|y\| \leq \|A\| \|v\|$, dann heisst $\|.\|$ passend zu $\|.\|$.

Die Unendlichnorm $\|v\|_\infty := \max_i |v_i|$ und die Zeilensummennorm $\|A\|_\infty := \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ passen zueinander.

Wie ist die Kondition für die Grundrechenarten?

Wie ist die Kondition für die Grundrechenarten?

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{d_i}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_i} \right|$$

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{d_i}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_i} \right|$$

Addition: $f(d) := d_1 + d_2, \quad d_1, d_2 > 0,$

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{d_i}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_i} \right|$$

Addition: $f(d) := d_1 + d_2, \quad d_1, d_2 > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial d_i} = 1$

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{d_i}{f(d)} \frac{\partial f}{\partial d_i} \right|$$

Addition: $f(d) := d_1 + d_2, \quad d_1, d_2 > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial d_i} = 1$

$K = \frac{d_1}{d_1+d_2} + \frac{d_2}{d_1+d_2} = 1.$

Addition: $f(d) := d_1 + d_2, \quad d_1, d_2 > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial d_i} = 1$

$K = \frac{d_1}{d_1+d_2} + \frac{d_2}{d_1+d_2} = 1.$

Multiplikation: $f(d) := d_1 * d_2,\ d_1, d_2 > 0$

Addition: $f(d) := d_1 + d_2, \quad d_1, d_2 > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial d_i} = 1$

$K = \frac{d_1}{d_1+d_2} + \frac{d_2}{d_1+d_2} = 1.$

Multiplikation: $f(d) := d_1 * d_2,\ d_1, d_2 > 0\ , \frac{\partial f}{\partial d_1} = d_2,\ \frac{\partial f}{\partial d_2} = d_1$

Addition: $f(d) := d_1 + d_2, \quad d_1, d_2 > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial d_i} = 1$

$K = \frac{d_1}{d_1+d_2} + \frac{d_2}{d_1+d_2} = 1.$

Multiplikation: $f(d) := d_1 * d_2,\ d_1, d_2 > 0\ , \frac{\partial f}{\partial d_1} = d_2,\ \frac{\partial f}{\partial d_2} = d_1$

$K = \frac{d_1}{d_1 * d_2} * d_2 + \frac{d_2}{d_1 * d_2} * d_1 = 2.$

Addition: $f(d) := d_1 + d_2, \quad d_1, d_2 > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial d_i} = 1$

$K = \frac{d_1}{d_1+d_2} + \frac{d_2}{d_1+d_2} = 1.$

Multiplikation: $f(d) := d_1 * d_2,\ d_1, d_2 > 0\ , \frac{\partial f}{\partial d_1} = d_2,\ \frac{\partial f}{\partial d_2} = d_1$

$K = \frac{d_1}{d_1 * d_2} * d_2 + \frac{d_2}{d_1 * d_2} * d_1 = 2.$

Division: $f(d) := \frac{d_1}{d_2}, \quad d_1, d_2 > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial d_1} = \frac{1}{d_2},\ \frac{\partial f}{\partial d_2} = -\frac{d_1}{d_2^2}$

$K = \frac{d_1}{\frac{d_1}{d_2}} * \frac{1}{d_2} + \frac{d_2}{\frac{d_1}{d_2}} * \frac{d_1}{d_2^2} = 2.$

Addition: $f(d) := d_1 + d_2, \quad d_1, d_2 > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial d_i} = 1$

$K = \frac{d_1}{d_1+d_2} + \frac{d_2}{d_1+d_2} = 1.$

Multiplikation: $f(d) := d_1 * d_2,\ d_1, d_2 > 0\ , \frac{\partial f}{\partial d_1} = d_2,\ \frac{\partial f}{\partial d_2} = d_1$

$K = \frac{d_1}{d_1 * d_2} * d_2 + \frac{d_2}{d_1 * d_2} * d_1 = 2.$

Division: $f(d) := \frac{d_1}{d_2}, \quad d_1, d_2 > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial d_1} = \frac{1}{d_2},\ \frac{\partial f}{\partial d_2} = -\frac{d_1}{d_2^2}$

$K = \frac{d_1}{\frac{d_1}{d_2}} * \frac{1}{d_2} + \frac{d_2}{\frac{d_1}{d_2}} * \frac{d_1}{d_2^2} = 2.$

Subtraktion: $f(d) := d_1 - d_2, \quad d_1 \geq d_2 \geq 0$

$K = \frac{d_1}{d_1-d_2} + \frac{d_2}{d_1-d_2} = \frac{d_1+d_2}{d_1-d_2}$

Subtraktion: $f(d) := d_1 - d_2, \quad d_1 \geq d_2 \geq 0$

$K = \frac{d_1}{d_1 - d_2} + \frac{d_2}{d_1 - d_2} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2} \to \infty$ für $d_2 \to d_1$

Subtraktion: $f(d) := d_1 - d_2, \quad d_1 \geq d_2 \geq 0$

$K = \frac{d_1}{d_1 - d_2} + \frac{d_2}{d_1 - d_2} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2} \to \infty$ für $d_2 \to d_1$

Dieser Effekt wird Auslöschung genannt,weil zwei etwa gleich große Gleikommazahlen viele gleiche Ziffern nach dem Komma haben, die sich bei der Differenzbildung auslöschen.

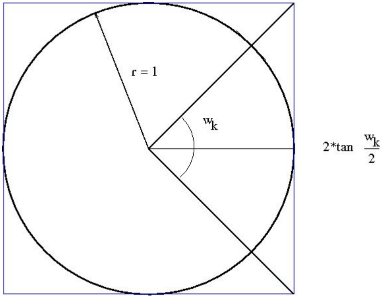
Subtraktion: $f(d) := d_1 - d_2, \quad d_1 \geq d_2 \geq 0$

$K = \frac{d_1}{d_1 - d_2} + \frac{d_2}{d_1 - d_2} = \frac{d_1 + d_2}{d_1 - d_2} \to \infty$ für $d_2 \to d_1$

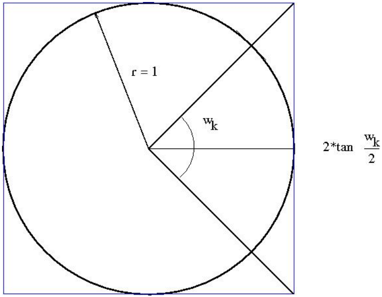
Dieser Effekt wird Auslöschung genannt,weil zwei etwa gleich große Gleikommazahlen viele gleiche Ziffern nach dem Komma haben, die sich bei der Differenzbildung auslöschen.

Die Auslöschung ist hauptverantwortlich für ungenaue Rechnerergebnisse, aber sie ist manchmal schwer zu entdecken.

π-Berechnung durch ein den Einheitskreis umschließendes n-Eck

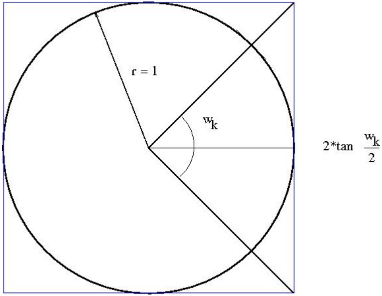


π-Berechnung durch ein den Einheitskreis umschließendes n-Eck



$A = \pi r^2 = \pi$

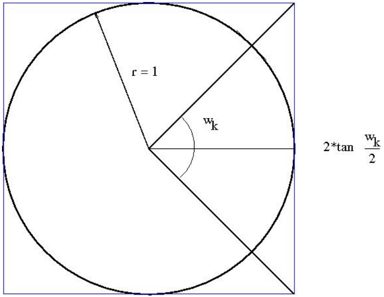
π-Berechnung durch ein den Einheitskreis umschließendes n-Eck



$A = \pi r^2 = \pi$

Fläche des n-Ecks = Anzahl der Dreiecke * Dreiecksfläche

π-Berechnung durch ein den Einheitskreis umschließendes n-Eck

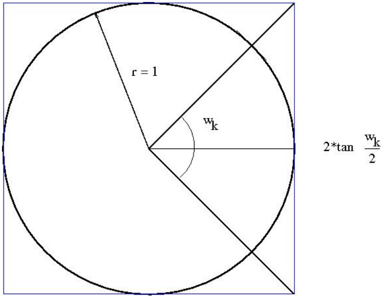


$A = \pi r^2 = \pi$

Fläche des n-Ecks = Anzahl der Dreiecke * Dreiecksfläche

Anzahl der Dreiecke: $n_k = 4 \cdot 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots$

π-Berechnung durch ein den Einheitskreis umschließendes n-Eck



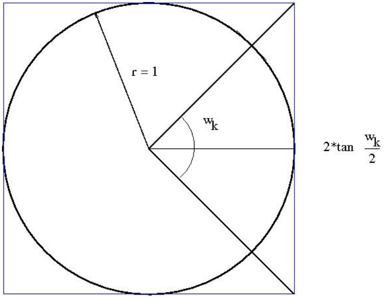
$A = \pi r^2 = \pi$

Fläche des n-Ecks = Anzahl der Dreiecke * Dreiecksfläche

Anzahl der Dreiecke: $n_k = 4 \cdot 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots$

Fläche eines Dreiecks: $a_k = \frac{g*h}{2} = \frac{2 \tan \frac{w_k}{2} r}{2} = \tan \frac{w_k}{2}$

π-Berechnung durch ein den Einheitskreis umschließendes n-Eck



$A = \pi r^2 = \pi$

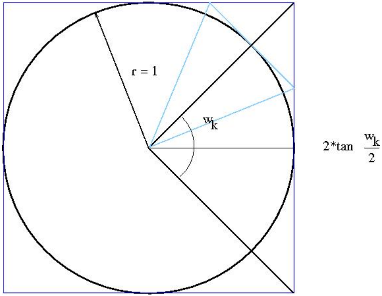
Fläche des n-Ecks = Anzahl der Dreiecke * Dreiecksfläche

Anzahl der Dreiecke: $n_k = 4 \cdot 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots$

Fläche eines Dreiecks: $a_k = \frac{g*h}{2} = \frac{2\tan\frac{w_k}{2} r}{2} = \tan\frac{w_k}{2}$

Fläche des n-Ecks: $A_k = 4 \cdot 2^k \tan\frac{w_k}{2}$

π-Berechnung durch ein den Einheitskreis umschließendes n-Eck



$A = \pi r^2 = \pi$

Fläche des n-Ecks = Anzahl der Dreiecke * Dreiecksfläche

Anzahl der Dreiecke: $n_k = 4 \cdot 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots$

Fläche eines Dreiecks: $a_k = \frac{g*h}{2} = \frac{2\tan\frac{w_k}{2} r}{2} = \tan\frac{w_k}{2}$

Fläche des n-Ecks: $A_k = 4 \cdot 2^k \tan\frac{w_k}{2}$

Übergang von k zu $k + 1$ - von w_k zu $\frac{w_k}{2}$

Übergang von k zu $k+1$ - von w_k zu $\frac{w_k}{2}$

Es gilt $\tan\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos w}{1+\cos w}}$ und $\cos\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos w)}$

Übergang von k zu $k+1$ - von w_k zu $\frac{w_k}{2}$

Es gilt $\tan\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos w}{1+\cos w}}$ und $\cos\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos w)}$

Mit $x_k := \cos w_k$ haben wir die Iterationsvorschrift:

Übergang von k zu $k+1$ - von w_k zu $\frac{w_k}{2}$

Es gilt $\tan\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos w}{1+\cos w}}$ und $\cos\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos w)}$

Mit $x_k := \cos w_k$ haben wir die Iterationsvorschrift:

$x_0 = 0$, $x_k = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x_{k-1})}$, $A_k = 4\cdot 2^k\sqrt{\frac{1-x_k}{1+x_k}}$

Übergang von k zu $k+1$ - von w_k zu $\frac{w_k}{2}$

Es gilt $\tan\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos w}{1+\cos w}}$ und $\cos\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos w)}$

Mit $x_k := \cos w_k$ haben wir die Iterationsvorschrift:

$x_0 = 0$, $x_k = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x_{k-1})}$, $A_k = 4\cdot 2^k\sqrt{\frac{1-x_k}{1+x_k}}$

Mit 10 stelliger Rechnung erhält man

Mit 10 stelliger Rechnung erhält man

k	$x_k = \cos w_k$	A_k	rel. Fehler
0	0.0	4.000000000	
1	0.7071067812	3.313708500	$5.48E-02$
2	0.9238795325	3.182597878	$1.31E-02$
3	0.9807852803	3.151724916	$3.23E-03$
4	0.9951847266	3.144118408	$8.04E-04$
5	0.9987954563	3.142223506	$2.01E-04$
6	0.9996988186	3.141750872	$5.04E-05$
7	0.9999247019	3.141630812	$1.21E-05$
8	0.9999811753	3.141601058	$2.68E-06$
9	0.9999952937	3.141631690	$1.24E-05$
10	0.9999988235	3.141528786	$2.03E-05$
11	0.9999997057	3.142462536	$2.77E-04$
12	0.9999999265	3.140860292	$2.33E-04$
13	0.9999999815	3.151525340	$3.16E-03$
14	0.9999999952	3.210595200	$2.20E-02$
15	0.9999999987	3.341693428	$6.37E-02$
16	0.9999999997	3.210595194	$2.20E-02$
17	1.000000000	0.0	

Mit 10 stelliger Rechnung erhält man

k	$x_k = \cos w_k$	A_k	rel. Fehler
0	0.0	4.000000000	
1	0.7071067812	3.313708500	$5.48E-02$
2	0.9238795325	3.182597878	$1.31E-02$
3	0.9807852803	3.151724916	$3.23E-03$
4	0.9951847266	3.144118408	$8.04E-04$
5	0.9987954563	3.142223506	$2.01E-04$
6	0.9996988186	3.141750872	$5.04E-05$
7	0.9999247019	3.141630812	$1.21E-05$
8	0.9999811753	3.141601058	$2.68E-06$
9	0.9999952937	3.141631690	$1.24E-05$
10	0.9999988235	3.141528786	$2.03E-05$
11	0.9999997057	3.142462536	$2.77E-04$
12	0.9999999265	3.140860292	$2.33E-04$
13	0.9999999815	3.151525340	$3.16E-03$
14	0.9999999952	3.210595200	$2.20E-02$
15	0.9999999987	3.341693428	$6.37E-02$
16	0.9999999997	3.210595194	$2.20E-02$
17	1.000000000	0.0	

Kann man das besser machen?

Kann man das besser machen?

Wir finden $\tan \frac{w}{2} = \frac{\tan w}{\sqrt{1+\tan^2 w}+1}$

Kann man das besser machen?

Wir finden $\tan\frac{w}{2} = \frac{\tan w}{\sqrt{1+\tan^2 w}+1}$

Mit $y_k := \tan\frac{w_k}{2}$ haben wir die Iterationsvorschrift

$y_0 = 1,\ y_k = \frac{y_{k-1}}{\sqrt{1+y_{k-1}^2}+1},\ A_k = 4\cdot 2^k y_k$

Mit 10 stelliger Rechnung erhält man jetzt

k	y_k	A_k	rel. Fehler
0	1.0	4.000000000	
1	$0.4142135624E+0$	3.313708500	$5.48E-02$
2	$0.1989123674E+0$	3.182597878	$1.31E-02$
3	$0.9849140338E-1$	3.151724908	$3.23E-03$
4	$0.4912684977E-1$	3.144118386	$8.04E-04$
5	$0.2454862211E-1$	3.142223630	$2.01E-04$
6	$0.1227246238E-1$	3.141750370	$5.02E-05$
7	$0.6136000157E-2$	3.141632080	$1.25E-05$
8	$0.3067971201E-2$	3.141602510	$3.14E-06$
9	$0.1533981991E-2$	3.141595118	$7.84E-07$
10	$0.7669905445E-3$	3.141593270	$1.96E-07$
11	$0.3834952159E-3$	3.141592808	$4.92E-08$
12	$0.1917476009E-3$	3.141592694	$1.29E-08$
13	$0.9587379959E-4$	3.141592664	$3.31E-09$
14	$0.4793689970E-4$	3.141592658	$1.40E-09$
15	$0.2396844984E-4$	3.141592658	$1.40E-09$
16	$0.1198422492E-4$	3.141592658	$1.40E-09$

Mit 10 stelliger Rechnung erhält man jetzt

k	y_k	A_k	rel. Fehler
0	1.0	4.000000000	
1	$0.4142135624E+0$	3.313708500	$5.48E-02$
2	$0.1989123674E+0$	3.182597878	$1.31E-02$
3	$0.9849140338E-1$	3.151724908	$3.23E-03$
4	$0.4912684977E-1$	3.144118386	$8.04E-04$
5	$0.2454862211E-1$	3.142223630	$2.01E-04$
6	$0.1227246238E-1$	3.141750370	$5.02E-05$
7	$0.6136000157E-2$	3.141632080	$1.25E-05$
8	$0.3067971201E-2$	3.141602510	$3.14E-06$
9	$0.1533981991E-2$	3.141595118	$7.84E-07$
10	$0.7669905445E-3$	3.141593270	$1.96E-07$
11	$0.3834952159E-3$	3.141592808	$4.92E-08$
12	$0.1917476009E-3$	3.141592694	$1.29E-08$
13	$0.9587379959E-4$	3.141592664	$3.31E-09$
14	$0.4793689970E-4$	3.141592658	$1.40E-09$
15	$0.2396844984E-4$	3.141592658	$1.40E-09$
16	$0.1198422492E-4$	3.141592658	$1.40E-09$

Rechnet mein Computer richtig?

Rechnet mein Computer richtig?

Ja, aber nur im Rahmen seiner Möglichkeiten und die sollte man genau kennen!

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!