5 Existenz & Eindeutigkeitder Lösung des AWP $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$

- Cauchy 1826 (Augustin Louis, 1789 - 1857) Erster Beweis für die Existenz einer Lösung unter den Voraussetzungen:

  $f : D \to \mathbb{R}$ stetig & beschränkt, $\exists\ f_y$ & ist beschränkt

- Lipschitz 1876 (Rudolf, 1832 - 1903) Existenz der Lösung unter L–Bedingung an f.

- Picard 1890 (Emile, 1856 - 1941) & Lindelöff 1894 (Ernst, 1827 - 1908)

  Existenz & Eindeutigkeit der Lösung unter L–Bedingung an f.

- Peano 1890 (Guiseppe, 1858 - 1932) Existenz allein unter Stetigkeit von f.

Satz 1 (Picard - Lindelöff)
Das *Anfangswertproblem*

$$y' = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0,\ \ x \in I := [x_0, x_0 + a],\ \ a > 0,$$

mit L–Bedingung an f bzgl. y auf $D := I \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &- \quad f \in C(D) \ \text{ (i.e., } f \text{ auf } D \text{ stetig)}, \\ &- \quad \exists L > 0 :\ |f(x,y) - f(x,\bar{y})| \le L\,|y - \bar{y}| \ \ \forall\ (x,y),(x;\bar{y}) \in D \end{aligned}$$

hat *genau eine* Lösung $y(x)$.

Beweis:
Via Banachschem Fixpunktsatz, vgl. 1.Semester.

Bringen AWP auf eine Fixpunktgleichung der Form:

$$y = Ty.$$

Sei $y : I \to \mathbb{R}$ diffbar & löse das AWP $\underset{f\text{ stet.}}{\Longrightarrow}$ $y'(x) = f(x,y(x))$ stetig und y sogar stetig diffbar

$$\underset{HSDIR}{\Longrightarrow} \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$$

(letztere ist eine Integralgleichung, abgekürzt: Igl).

Umgekehrt. Falls $y : I \to \mathbb{R}$ stetig & der Igl genügt, so $\Longrightarrow$

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t,y(t))dt = y_0.$$

& y ist wegen $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$ stetig diffbar mit $y' = f(x,y)$, i.e., y genügt dem AWP. Daher

$$(*) \qquad y \text{ löst das AWP } \Longleftrightarrow y \text{ löst die Igl.}$$

Die Igl schreiben wir in der Form:

$$y = Ty \ \text{ mit } \ (Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt.$$

Dabei ist T ein (i.a. nicht linearer) Integraloperator, der auf $C(I)$, dem linearen Raum aller auf I stetigen reellen Funktionen, wirkt, er ordnet jeder Funktion $y \in C(I)$ eine Funktion $Ty \in C(I)$ zu, i.e.,

$$T : C(I) \to C(I).$$

Also:
$y = Ty$ & $(*)$ $\implies$ Lösungen vom AWP sind genau die Fixpunkte von T.
Wenn wir zeigen können, daß T genau einen Fixpunkt hat, sind wir fertig.

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert eine derartige Aussage. Wir müssen prüfen, ob wir die Voraussetzungen erfüllen können. $C(I)$ wird mit

$$\|y\|_0 := \max_{x \in I} |y(x)| \qquad \forall\, y \in C(I)$$

zum normierten Raum ($\|y\|_0$ ist Norm, wissen wir, & $\|y\|_0$ induziert eine Metrik, mehr noch der Raum ist vollständig, wissen wir auch!), i.e., $(C(I), \|\cdot\|_0)$ ist ein Banach–Raum (für die Form „unseres“ Banachschen Fixpunktsatzes: es liegt ein vollständiger metrischer Raum vor). Wenn wir zeigen können, daß T ein kontraktiver Operator ist, i.e.,

$$\exists\; q, 0 < q < 1 : \; \|Ty - T\bar{y}\|_0 \le q\, \|y - \bar{y}\| \qquad \forall y, \bar{y} \in C(I)$$

gilt, so sind wir fertig.

$$
\begin{aligned}
(**) \quad |(Ty)(x) - (T\bar{y})(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t)) dt \right| \\
&\le \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t, y(t)) - f(t, \bar{y}(t))|}_{\le L|y(t) - \bar{y}(t)|} dt \le L \int_{x_0}^{x} |y(t) - \bar{y}(t)| dt \\
&\le L(x - x_0)\|y - \bar{y}\|_0
\end{aligned}
$$

$(**)$ gilt $\forall x \in I$ also auch für

$$\max_{x \in I} |(Ty)(x) - (T\bar{y})(x)| = \|Ty - T\bar{y}\|_0$$

$\implies$

$$\|Ty - T\bar{y}\|_0 \le La \|y - \bar{y}\|_0$$

$\implies T$ genügt einer L-Bedingung mit der Konstanten La. Damit T kontraktiv ist, muß $La < 1$ sein, das ist nur der Fall, wenn $a < \frac{1}{L}$ ist.

Was macht man, falls $a \ge \frac{1}{L}$?

Eine Möglichkeit: Man bestimme $n \in \mathbb{N} : b := \frac{a}{n} < \frac{1}{L}$ und bestimme wie oben nach einander die Lösungen für die Intervalle

$$x_0 \le x \le x_0 + b, x_0 + b \le x \le x_0 + 2b, \ldots, x_0 + (n-1)b \le x \le x_0 + nb = x_0 + a$$

Jedoch braucht man dazu ein Fortsetzungsargument für die Lösung, welches wir noch nicht haben. Deshalb wählen wir einen eleganteren Weg.

$C(I)$ wird mit einer gewichteten Max-Norm versehen:

$$\|y\| := \max_{x \in I} e^{-\alpha x} |y(x)|, \quad \alpha > 0 \;\; \text{fix},$$

$\|\cdot\|$ ist offenbar eine Norm.

Mit der gewichteten Norm kehren wir zurück zur Abschätzung $(**)$: wir hatten

$$\begin{aligned}\cdots \leq & L\int_{x_0}^{x}|y(t)-\bar{y}(t)|dt = L\int_{x_0}^{x}|y(t)-\bar{y}(t)|e^{-\alpha t}\cdot e^{\alpha t}dt\\ \leq & L\|y-\bar{y}\|\int_{x_0}^{x}e^{\alpha t}dt \leq L\|y-\bar{y}\|\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\end{aligned}$$

Also liefert $(**)$ mit der gewichteten Norm

$$|Ty(x)-T\bar{y}(x)|e^{-\alpha x} \leq \frac{L}{\alpha}\|y-\bar{y}\| \qquad \forall x\in I$$

Wir können das Maximum über alle $x\in I$ bilden, und haben

$$\|Ty-T\bar{y}\| \leq \frac{L}{\alpha}\|y-\bar{y}\|.$$

Für die Wahl $\alpha=2L$ folgt für die Kontraktionskonstante $q=\frac{1}{2}$ & somit die Behauptung auf ganz I.

$\square$

Bemerkungen

(i) Satz 1. zeigt:
Aus einer stetigen Fkt. $y_1: I\to R, y_1(x_0)=y_0$ kann man durch sukzessive Approximation

$$y_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_k(t))dt, \quad k=1,2,\ldots$$

eine Folge $\{y_k(x)\}$ bilden, die der Norm nach & damit gleichmäßig gegen eine Lösung $y(x)$ vom AWP konvergiert. Starte z.B. mit $y_1(x)\equiv y_0$.

(ii) Hinreichend für die L–Bedingung im Satz ist: $\exists\ \frac{\partial f}{\partial y}$ in D und ist beschränkt durch L, denn nach dem MWS folgt dann $|\frac{f(x,y)-f(x,\bar{y})}{y-\bar{y}}|\leq L$ in D.

(iii) Eine analoge Existenz- & Eindeutigkeitsaussage erhält man „links“ von x_0, i.e., für das AWP

$$y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0,\ x_0-a\leq x\leq x_0.$$

Bws. Man transformiere (Spiegelung an der Geraden $x=x_0$)

$$\bar{y}:=y(2x_0-x),\ \overline{f}(x,y):=-f(2x_0-x,y)$$

$$\Longrightarrow \text{ AWP } \bar{y}'=\overline{f}(x,\bar{y}),\ x_0\leq x\leq x_0+a,\ y(x_0)=y_0$$

(iv) Falls f nicht L-stetig ist bzgl. y, so konvergiert die durch sukzessive Approximastion erzeugte Folge $\{y_k(x)\}$ i.a. nicht.

(v) Häufig ist f nicht im ganzen Streifen $I\times\mathbb{R}$ erklärt sondern nur in einer Umgebung $U=U(x_0,y_0)\subset\mathbb{R}^2$.

Zu (v) zeigen wir:

Satz 2
Seien

$$Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\}, \ \ a,b > 0,$$

$f \in C(Q)$ und genüge in Q bzgl. y einer L–Bedingung.

$\Longrightarrow \quad \exists \ !$ Lösung des AWP $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, welche mindestens in $I := [x_0, x_0 + \alpha]$ existiert, wobei $\alpha := \min(a, \frac{b}{A})$, $A := \max\limits_{Q} |f|$.

<u>**Beweis:**</u>

Wir setzen f auf $D := [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}$ stetig fort, i.e., wir definieren

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x, y_0 + b), & y > y_0 + b \\ f(x,y), & (x,y) \in Q \\ f(x, y_0 - b), & y < y_0 - b. \end{cases}$$

$\Longrightarrow \tilde{f} \in C(D)$ & $\tilde{f}$ genügt in D bzgl. y einer L - Bed. mit derselben Konst. L wie für f.
Auf

$$\widetilde{\text{AWP}} \qquad y' = \tilde{f}(x,y), \ y(x_0) = y_0$$

wenden wir Satz 1. an $\Longrightarrow$ $\widetilde{\text{AWP}}$ hat genau eine Lösung, sie sei mit $y(x)$ bezeichnet. Dieses $y(x)$ löst auch das AWP $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, so lange $y(x)$ nur in Q verläuft, präziser so lange die Punkte $(x, y(x)) \in Q$ für $x \in [x_0, x_0 + a]$. Wegen $y' = f(x,y)$ & $A := \max |f(x,y)|$ verlässt $y(x,y)$ die Menge

$$W := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha, \ y - A(x - x_0) \leq y \leq y_0 + A(x - x_0)\} \subset Q$$

nicht vor der Stelle $x_0 + \alpha$ und somit auch nicht Q vor dieser Stelle, denn $\alpha := \min\{a, \ b/A\}$.
$\Longrightarrow$ die Behauptung. $\square$

<u>Bemerkungen</u>

(i) Man hätte die <u>stetige</u> Fortsetzung von f umgehen können, verzichten wir drauf.

(ii) Völlig analog verfährt man für ein „links“ von $x = x_0$ gelegenes Rechteck Q.

Die Forderung in Satz 1., daß f in D bzgl. y einer L-Bed. genügen soll, ist hart! Wie wir wissen, genügt y^2 in $I \times \mathbb{R}$ keiner globalen L-Bed. (Erinnerung: y^2 nicht gleichm. stetig). Man sieht sofort

$$(x,y), (x,\bar{y}) \in I \times \mathbb{R} \Longrightarrow f(x,y) - f(x,\bar{y}) = y^2 - \bar{y}^2 = (y - \bar{y})(y + \bar{y})$$

für $y, \bar{y} \in \mathbb{R}$ beliebig. Da $y + \bar{y}$ bel. groß werden kann, kann keine L–Bedingung auf D bzgl. y erfüllt sein. <u>Jedoch:</u>
auf jedem $I \subset \mathbb{R}$ ist $y + \bar{y}$ beschränkt. Das führt auf die

Lokale L–Bedingung.

Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ & $f \in C(D)$. Man sagt, daß <u>f in D bzgl.</u> <u>y einer lokalen</u> <u>L-Bed. genügt</u>, falls

$$\forall \ (x_0, y_0) \in D \ \exists \ U = U(x_0, y_0) \ \exists \ L := L(x_0, y_0) > 0 :$$
$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq L \, |y - \bar{y}| \qquad \forall \ (x,y), (x,\bar{y}) \in U \cap D.$$

Hinreichendes Kriterium für die Existenz einer lokalen L–Bedingung.

Seien: $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C(D)$, $\exists\ f_y \in C(D)$.

$$\Longrightarrow f \text{ genügt bzgl. } y \text{ in } D \text{ einer lokalen L–Bed.}$$

Beweis Sei $(x_0,y_0) \in D$ & sei $U := U(x_0,y_0)$ eine Kreisscheibe um $(x_0,y_0) : \overline{U} \subset D.$ $\Longrightarrow$ f_y ist in U beschränkt, i.e., $\exists\ L : |f_y| \leq L$ in U. Für $(x,y),(x,\bar{y}) \in U$

$$\Longrightarrow |f(x,y) - f(x,\bar{y})| = |(y-\bar{y})\,f_y(x,y^*)| \leq L|y-\bar{y}|.$$

weil der MWS die Existenz dieses $y^* \in (y,\bar{y})$ impliziert. #

Zum Bsp. $f(x,y) = y^2$. f genügt in $D = \mathbb{R}^2$ (bzw. $D = I \times \mathbb{R}$) einer lokalen L-Bed., denn $|y+\bar{y}|$ bleibt $\forall$ $(x,y),(x,\bar{y}) \in U(x_0,y_0)$ (Kreisscheibe mit $\overline{U} \subset D$) immer beschränkt.

Zur lokalen Lösbarkeit vom AWP $\mathbf{y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0}$

Satz 3
Seien: $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f \in C(D)$ & f genügt in D bzgl y einer lokalen L-Bedingung

$$\Longrightarrow$$

AWP ist lokal eindeutig lösbar, i.e., in einer Umgebung von x_0 existiert genau eine Lösung $y(x)$ des AWP.

Beweis:

Wie oben wird Q betrachtet. Falls Q hinreichend klein ist, so genügt f in Q bzgl. y einer L-Bed $\underset{\text{zuvor}}{\overset{\text{wie}}{\Longrightarrow}}$ Existenz & Eindeutigkeit der Lösung in einem Intervall rechts von x_0. Wiederum kann man nach links dieselbe Konstruktion ausführen. □

Frage: Kann man diese Lösung $y(x)$ eindeutig fortsetzen?

Satz 4
Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ & $f \in C(D)$.

(i) Falls $\Phi(x)$ die Dgl. $y' = f(x,y)$ in $I := [x_0,b)$ löst & $W \subset D$ eine kompakte Menge mit $(x,\Phi(x)) \in W\ \ \forall\ x \in I$ ist,

$$\Longrightarrow \Phi \text{ ist auf } \bar{I} = [x_0,b] \ \underline{\text{fortsetzbar}}.$$

(ii) Seien weiter die folgenden Voraussetzungen erfüllt

- $\Phi(x)$ sei Lösung von $y' = f(x,y)$ in $\bar{I} = [x_0,b]$
- Ψ löse $y' = f(x,y)$ in $[b,c]$;
- $\Phi(b) = \Psi(b)$.

$$\Longrightarrow u(x) := \begin{cases} \Phi(x), & x \in [x_0,b] \\ \Psi(x), & x \in (b,c] \end{cases} \text{ löst } y' = f(x,y) \text{ in } [x_0,c].$$

Beweis:

(i) $f \in C(D)$, $W \subset D$ kompakt $\Longrightarrow f$ beschränkt auf W, i.e.,

$$\exists\ K \geq 0 : |f| \leq K \text{ auf } W.$$

$\Longrightarrow\ |f(x,\Phi(x))| = |\Phi'(x)| \leq K,\ x \in [x_0,b) \Longrightarrow \Phi$ ist gleichmäßig stetig in $[x_0,b) \Longrightarrow \exists\ \beta := \lim\limits_{x\to b_-} \Phi(x)$ & $(b,\beta) \in W$. Mit $\Phi(b) := \beta \Longrightarrow \Phi$ & $f(x,\Phi(x))$ sind stetig in $[x_0,b]$.
Wir wissen:

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + \int^x \_x_0 f(t,\Phi(t))dt, \quad x \in [x_0,b).$$

Für $x \to b_- \Longrightarrow$ die Gleichung ist auch für $x = b$ richtig. $\Longrightarrow\ \Phi$ ist in b linksseitig diffbar & $\Phi'(b) = f(b,\Phi(b))$.

(ii) Nur zu zeigen: $u(x)$ genügt für $x = b$ der Dgl. $y' = f(x,y)$. Das ist aber klar, weil u in $x = b$ links– & rechtsseitig diffbar ist & beide Ableitungen gleich $f(b,\Phi(b))$ sind.

□

Im folgenden Satz 5. ordnen wir unsere vorstehenden Ergebnisse und fassen sie zusammen:

Satz 5 (Existenz– & Eindeutigkeitssatz)
Seien:

- $D \subset \mathbb{R}^2$ offen
- $f \in C(D)$
- f genüge bzgl. y in D einer lokalen L-Bedingung
- AWP: $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$

$$\Longrightarrow$$

AWP hat für bel. $(x_0,y_0) \in D$ eine Lösung $\Phi(x)$, welche nicht fortsetzbar ist (weil selbst schon fortgesetzt!), welche nach links & rechts (i.e., bzgl. x) dem Rand von D beliebig nahe kommt. Φ ist eindeutig, i.e., alle weiteren Lösungen des AWP sind Einschränkungen von Φ.

Bemerkung „Φ kommt nach rechts dem Rand von D beliebig nahe“ bedeutet:
Falls

$$G := \left\{(x,y) \in \overline{\text{graph}\ \Phi} | x \geq x_0\right\},$$

so folgt

(i) G ist keine komp. Teilmenge von D.

(i) ist äquivalent zur Formulierung:
Φ existiert nach rechts in $x_0 \leq x < b$ & einer der folgenden Fälle tritt ein:

(ii) $b = \infty$ (i.e. $\Phi(x)$ existiert für alle $x \geq x_0$);

(iii) $b < \infty$ & $\limsup\limits_{x\to b_-} |\Phi(x)| = \infty$ (i.e. Φ wird beliebig groß);

(iv) $b < \infty$ & $\liminf\limits_{x\to b_-} \rho(x,\Phi(x)) = 0$ (i.e. Φ kommt dem Rand von D bel. nahe; wobei $\rho(x,y) :=$ Abstand zwischen $(x,y) \in D$ & bdD).

(i) heißt: G entweder unbeschränkt (Fälle (ii) & (iii)) oder beschränkt doch Randpunkte von D enthaltend.

Auf einen explizitEN Beweis von Satz 5. verzichten wir, weil er nur die Arrangierung unserer schon bewiesenen Details in zwei indirekten Beweisen wäre.

Zum Existenzsatz von Peano.

Wir kennen mit $y' = \sqrt{|y|}$ ein Beispiel, wo $f(x,y) := \sqrt{|y|}$ keiner L-Bedingung genügt.
Hatten beim Richtungsfeld schon diskutiert, ob die Stetigkeit von $f(x,y)$ in D genügt, um die Existenz einer Lösung von $y' = f(x,y)$ garantieren zu können. Die Antwort gibt der

Satz 6 (Existenzsatz von Peano, 1890)
Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f \in C(D)$.
$\Longrightarrow \ \forall \ (x_0,y_0) \in D$ hat das AWP $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ (mindestens) eine Lösung $y(x)$. Sie läßt sich nach rechts & links bis zum Rand von D fortsetzen.

Der Beweis erfordert eine Reihe von neuen Hilfsmittel u.a. den Satz von Arzelá / Ascoli, aus Zeitgründen verzichten wir darauf.

Ein elementarer Bws. läßt sich mit dem Polygonzugverfahren von Euler–Cauchy für eine schwächere Form vom Satz 6. geben.

Satz 6'. (schwache Form des Peanoschen Existenzsatzes)

Sei f in $I \times \mathbb{R}$ stetig & beschränkt, wobei $I = [x_0, x_0 + a], a > 0$.

$$\Longrightarrow \ \exists \ y \in C^1(I) : y' = f(x,y) \ \& \ y(x_0) = y_0.$$