Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2009/10

Abgabe: Aufgabe 2-4 am 4.11.2009 in der Vorlesung, Aufgabe 1 in den Übungen vom 4.11.-9.11.

Aufgabe 1
(i) Beschreiben Sie die folgenden Mengen sowohl implizit als auch explizit:

a) M_1 sei die Menge der rellen Nullstellen des quadratischen Polynoms x^2+px+q für relle Zahlen p und q,

b) M_2 sei die Menge aller möglichen Summen zweier ungerader Primzahlen,

c) M_3 sei die Menge der ganzen Zahlen, die durch 2 oder durch 3 teilbar sind.

(ii) Entscheiden Sie, welche Mengen ineinander enthalten und welche gleich sind:

a) $N_1 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$,

b) $N_2 := \{3; 5; 7; 11\}$,

c) N_3 sei die Menge der Primzahlen,

d) N_4 sei die Menge der ungeraden ganzen Zahlen,

e) $N_5 := \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N} : nx \in \mathbb{Z}\}$,

f) $N_6 := \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2
(1) Seien $M_0 := \emptyset$, und rekursiv für alle $k \in \mathbb{N}$ $M_k := \mathcal{P}(M_{k-1})$ definiert. Beschreiben Sie M_1, M_2 und M_3 explizit. Zeigen Sie die Beziehung $M_k \subseteq M_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
(2) Bestimmen Sie

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0 \wedge k \text{ teilt } n\}.$$

Wieviele Elemente enthält diese Menge?
(3) Bestimmen Sie

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left\{\frac{m}{n}\right\}$$

als Teilmenge der rationalen Zahlen.

Bitte wenden...

Aufgabe 3
Untersuchen Sie, ob für beliebige endliche Mengen M die folgenden Relationen, R, auf der Potenzmenge, $\mathcal{P}(M)$, reflexiv oder transitiv sind. Welche sind Äquivalenzrelationen, welche Ordnungsrelationen: Seien $a, b \subset M$ Teilmengen:

i) $aRb :\Leftrightarrow a \subseteq b$

ii) $aRb :\Leftrightarrow a \cap b \neq \emptyset$

iii) $aRb :\Leftrightarrow \sharp(a) \leq \sharp(b)$

iv) $aRb :\Leftrightarrow \sharp(a) = \sharp(b)$.

$\sharp(a)$ bezeichne die Anzahl der Elemente in $a \subset M$

Aufgabe 4
Seien $a, m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ zwei teilerfremde natürliche Zahlen, d.h. es gibt keine natürliche Zahl größer als 1, die beide Zahlen teilt.
Zeigen Sie: es gibt eine natürliche Zahl k, $1 \leq k \leq m-1$, für die a^k bei Division durch m den Rest 1 lässt (man schreibt dafür $a^k \equiv 1 \mod m$).
Hinweis: Verwenden Sie das "Schubfachprinzip" (siehe z.B. Wikipedia).