Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2009/10

Abgabe: Aufgabe 2-4 am 11.11.2009 in der Vorlesung, Aufgabe 1 in den Übungen vom 11.11.-16.11.

Aufgabe 1.

a) Geben Sie die Multiplikations - und Additionstafeln für $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ an.

b) Bestimmen Sie die letzte Ziffer von

$$\left(2^{2009} + 9^{2009}\right)^{2009}.$$

Aufgabe 2. a) Bestimmen Sie alle Abbildungen $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ und geben Sie sie durch ihre Wertetafeln an. Welche sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?
b) Bestimmen Sie alle möglichen Verknüpfungen der folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; &\quad f_1(x) = (\sin x, \cos x), \\ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; &\quad f_2(x, y) := x^2 + y^2, \\ f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; &\quad f_3(x, y) = (x^2, y^2, xy). \end{aligned}$$

c) Welche der folgenden Abbildungen ist bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie in diesem Fall die Umkehrabbildung:

$$\begin{aligned} g_1 : \mathbb{R} \to (-1, 1); &\quad g_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \\ g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; &\quad g_2(x) = x^3 - x. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Gegeben seien zwei beliebige Mengen A und B. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A \cup B)$, $f(C, D) := C \cup D$ surjektiv ist. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für A und B an, für die die Abildung auch injektiv wird. $\mathcal{P}(M)$ bezeichne die Potenzmenge einer Menge M, d.h. die Menge aller ihrer Teilmengen.

Bitte wenden...

Aufgabe 4. Wir betrachten die folgende, auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definierte Relation :

$$(m, n) \sim (m', n') \Longleftrightarrow m + n' = m' + n.$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Wieviele Elemente haben die Äquivalentklassen? Bezeichnen Sie graphisch die Äquivalenzklassen von $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(0, 2)$.

c) Sei $Q = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$ die Quotientenmenge. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : Q &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [(m, n)] &\rightarrow m - n \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Geben Sie das Inverse φ^{-1} an.

d) Zeigen Sie, dass die Operation

$$\begin{aligned} * : Q \times Q &\rightarrow Q \\ ([(m, n)], [(m', n')]) &\rightarrow [(mm' + nn', mn' + m'n)] \end{aligned}$$

wohldefiniert ist. Welcher Operation entspricht dies auf den ganzen Zahlen unter der in (c) beschriebenen Bijektion?