Mögliche Prüfungsfragen

February 23, 2007

1. Was ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit? Nennen Sie Beispiele, zeigen Sie dafür die geforderten Eigenschaften!)
2. Was sind differenzierbare Abbildungen, Vektorfelder, Metriken, Differentialformen?
3. Definieren Sie die Lieableitung für Vektorfelder/Differentialformen!
4. Beschreiben Sie Untermannigfaltigkeiten/Quotientenmannigfaltigkeiten! Zeigen Sie unter welchen Voraussetzungen diese gegeben sind! Warum stimmen die Quotienten-/Teilraumtopologie mit der Mannigfaltigkeiten-=Topologie üeberein?
5. Wie ist die Orientierung einer Mannigfaltigkeit definiert? Nennen Sie Mannigfaltigkeiten, die orientierbar sind und solche, die es nicht sind. begründen Sie Ihre Wahl!
6. Definieren Sie differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand!
7. Zeigen Sie, dass die Dimension eine Invariante der Mannigfaltigkeit ist!
8. Definieren Sie den Rand einer Mannigfaltigkeit mit Rand! Zeigen Sie, dass dieser eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand (mit der Teilraumtopologie) ist. Geben Sie eine Orientierung des Randes an, falls die Mannigfaltigkeit orientiert ist.
9. Was ist eine Differentialform? Geben Sie Beispiele an.
10. Berechnen Sie das Wedge-Produkt, den Hodge-Stern bzw. das äußere Differential von gegebenen Differentialformen! Leiten Sie die Cartan-Formeln her.
11. Beweisen Sie das Poincaré-Lemma!
12. Definieren Sie das Integral einer k-Form üeber einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit!
13. Berechnen Sie dies für ein gegebenes Beispiel!

14. Erläutern Sie den Satz von Stokes! Wie beweist man den?
15. Nennen und beschreiben Sie Integralformeln, die aus dem Satz von Stokes folgen!
16. Erläutern und beweisen Sie den Fixpunktsatz von Brouwer!
17. Was ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit? Welche geometrischen Größen lassen sich mithilfe der Riemannschen Metrik messen?
18. Bestimmen Sie die kritischen "Punkte" des Längenfunktionals!
19. Was ist eine kovariante Ableitung (für Vektorfelder, Differentialformen, Funktionen)?
20. Definieren Sie die kovariante Ableitung entlang einer differenzierbaren Abbildung!
21. Definieren Sie den Levi-Civita-Zusammenhang. Erläutern Sie dessen definierenden Eigenschaften!
22. Zeigen Sie die Existenz des Levi-Civita-Zusammenhangs und bestimmen Sie ihn in lokalen Koordinaten!
23. Was sind "Normalkoordinaten"? Wie sieht die Riemannsche Metrik bezüglich dieser aus?
24. Erläutern und zeigen Sie das Gauß-Lemma! warum gilt die Aussage nicht für alle Paare von Tangentialvektoren?
25. Zeigen Sie, dass Geodäten lokal minimierend sind! Warum sind sie es im Allgemeinen nicht global?
26. Erläutern und beweisen Sie den Satz von Hopf und Rinow!
27. Was ist ein Hamiltonsches System? Zeigen Sie, dass Geodäten mit konstanter Geschwindigkeit Lösungen der Bewegungsgleichungen eines Hamiltonschen Systems sind!

Ansonsten: Beispiele, Beispiele, Beispiele,... Die finden Sie in der Vorlesung, in den Übungsaufgaben, in der angegebenen Literatur.