ÜBUNGSBLATT 5

PETER HERBRICH

Aufgabe 21. *Verkleben*

(i) Seien i_X und i_Y die per Definition der Topologie auf $X \sqcup Y$ stetigen Inklusionen

$$i_X : X \hookrightarrow X \sqcup Y \qquad \text{und} \qquad i_Y : Y \hookrightarrow X \sqcup Y\,.$$

Bezeichne weiter π die stetige Projektion auf den Quotientenraum $(X \sqcup Y) / \sim$

$$\pi : X \sqcup Y \to (X \sqcup Y) / \sim\ .$$

Dann sind $\vartheta_X := \pi \circ i_X$ und $\vartheta_Y := \pi \circ i_Y$ als Kompositionen stetiger Abbildungen stetig. Die Einschränkung von ϑ_Y auf sein Bild ist der gesuchte Homöomorphismus Ψ zwischen Y und einem Teilraum von $(X \sqcup Y) / \sim$

$$\Psi : Y \to \vartheta_Y (Y) = \bigcup_{y \in Y} [y] \subset (X \sqcup Y) / \sim \ \text{mit}\ \Psi : y \in Y \mapsto \vartheta_Y (y) = \pi (i_Y (y)) = [y]\ .$$

Zunächst einmal ist Ψ surjektiv nach Definition. Die Äquivalenzrelation auf $X \sqcup Y$ wird erzeugt von $x \sim \varphi (x)$, d.h. für $y \in Y$ enthält die Klasse $[y]$ genau y und seine Urbilder unter φ

$$\forall y \in Y : [y] = \{y\} \cup \varphi^{-1} (y)\ .$$

Demnach folgt aus $[y_1] = [y_2]$, d.h. $y_2 \in [y_1]$, sofort $y_1 = y_2$. Damit ist Ψ auch injektiv.
Als Einschränkung einer steitgen Abbildung auf ihr Bild ist Ψ stetig. Sei dazu $U \subset \vartheta_Y (Y)$ offen, d.h. nach Definition der Teilraumtopologie gibt es eine in $(X \sqcup Y) / \sim$ offene Teilmenge V mit $U = V \cap \vartheta_Y (Y)$. Dann ist

$$\Psi^{-1} (U) = \vartheta_Y^{-1} (U) = \vartheta_Y^{-1} (V \cap \vartheta_Y (Y)) = \vartheta_Y^{-1} (V) \cap \vartheta_Y^{-1} (\vartheta_Y (Y)) = \vartheta_Y^{-1} (V) \cap Y$$

wegen der Stetigkeit von ϑ_Y offen in Y.
Es genügt nun die Offenheit von Ψ zu zeigen. Sei dazu $U \subset Y$ offen in Y. Dann ist $\Psi (U) = \pi (i_Y (U)) = \{[y] \,| y \in U\}$. Das Urbild dieser Menge unter π ist nun

$$\pi^{-1} (\Psi (U)) = \pi^{-1} \left(\bigcup_{y \in U} \{[y]\} \right) = \bigcup_{y \in U} \pi^{-1} \{[y]\} = \bigcup_{y \in U} \left(\varphi^{-1} (y) \cup \{y\}\right) = \varphi^{-1} (U) \cup U\,.$$

Diese Menge ist im Allgemeinen nicht offen in $X \sqcup Y$, da $\varphi^{-1} (U)$ nur offen in X_0, nicht aber zwingend offen in X ist. Es gibt also eine offene Menge $V \subset X$ mit $\varphi^{-1} (U) = V \cap X_0$. Ist $x \in X \backslash X_0$, so gilt nach Definition der Äquivalenzrelation auf $X \sqcup Y$

$$[x] = \{x\}\ .$$

Damit ist $\pi\left(i_X(V)\cup i_Y(U)\right)\subset (X\sqcup Y)/\sim$ offen, denn das Urbild unter π ist

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}\left(\pi\left(i_X(V)\cup i_Y(U)\right)\right) &= \pi^{-1}\left(\bigcup_{x\in V\setminus X_0}\{[x]\}\cup\bigcup_{x\in V\cap X_0}\{[x]\}\cup\bigcup_{y\in U}\{[y]\}\right)\\
&= \pi^{-1}\left(\bigcup_{x\in V\setminus X_0}\{[x]\}\right)\cup\pi^{-1}\left(\bigcup_{y\in U}\{[y]\}\right)\\
&= V\setminus X_0\cup\varphi^{-1}(U)\cup U\\
&= V\setminus X_0\cup(V\cap X_0)\cup U = V\cup U\in\mathcal{O}(X\sqcup Y)\,.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt, dass wegen $\varphi^{-1}(U)=V\cap X_0$ folgende Inklusion gilt

$$\bigcup_{x\in V\cap X_0}\{[x]\}\subset\bigcup_{y\in U}\{[y]\}\,.$$

Da π surjektiv ist, gilt für beliebige Teilmengen $A\subset(X\sqcup Y)/\sim$

$$\pi\left(\pi^{-1}(A)\right)=A\,.$$

Da nun aber

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}\left(\pi\left(i_X(V)\cup i_Y(U)\right)\cap\vartheta_Y(Y)\right) &= (V\cup U)\cap\pi^{-1}\left(\bigcup_{y\in Y}\{[y]\}\right)\\
&= (V\cup U)\cap\left(\varphi^{-1}(Y)\cup Y\right)\\
&= (V\cup U)\cap(X_0\cup Y)\\
&= \varphi^{-1}(U)\cup U\\
&= \pi^{-1}\left(\Psi(U)\right)\,,
\end{aligned}$$

ist $\Psi(U)=\pi\left(i_X(V)\cup i_Y(U)\right)\cap\vartheta_Y(Y)$ teilraumoffen in $\vartheta_Y(Y)$.

(ii) Im obigen Teil wurde deutlich, dass jede stetige Abbildung stetig bleibt, wenn man sie als Abbildung auf ihr eigenes Bild auffasst. Im Bildraum wird dabei die Teilraumtopologie gewählt. Ist nun zusätzlich φ ein Homöomorphismus auf sein Bild, d.h. gibt es eine stetige Umkehrung

$$\eta: Y_0:=\varphi(X_0)\to X_0 \qquad \text{mit} \qquad \eta(y)=\varphi^{-1}(y)\,,$$

so ist auch X homöomorph zu einem Teilraum des Quotientenraumes $(X\sqcup Y)/\sim$. In Analogie zum ersten Teil sei nun Φ die Einschränkung von ϑ_X auf sein Bild

$$\Phi: X\to\vartheta_X(X)=\bigcup_{x\in X}[x]\subset(X\sqcup Y)/\sim\ \text{mit}\ \Phi: x\in X\mapsto\psi_X(x)=\pi\left(i_X(x)\right)=[x]\,.$$

Φ ist offensichtlich surjektiv. Da φ als Homöomorphismus auf sein Bild injektiv ist, lassen sich die Klassen $[x],[y]\in(X\sqcup Y)/\sim$ für Elemente $x\in X, y\in Y$ explizit angeben

$$\begin{array}{ccc}
x\in X_0\Rightarrow[x]=\{x,\varphi(x)\in Y\} & \text{sowie} & x\in X\setminus X_0\Rightarrow[x]=\{x\}\\
y\in Y_0\Rightarrow[y]=\left\{y,\varphi^{-1}(y)=\eta(y)\in X\right\} & \text{sowie} & y\in Y\setminus Y_0\Rightarrow[y]=\{y\}\,.
\end{array}$$

Damit ist aber Φ auch injektiv. Nach oben Gesagtem ist Φ stetig, da ϑ_X stetig ist.
Es genügt die Offenheit von Φ zu zeigen. Sei dazu $U\subset X$ offen. Dann lässt sich das Urbild von $\Phi(U)$ unter π schreiben als

$$\pi^{-1}\left(\Phi(U)\right)=\pi^{-1}\left(\bigcup_{x\in U\setminus X_0}\{[x]\}\cup\bigcup_{x\in U\cap X_0}\{[x]\}\right)=U\setminus X_0\cup(U\cap X_0)\cup\varphi(U\cap X_0)\,.$$

Da $U\cap X_0$ offen in X_0 und φ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, gibt es eine in Y offene Menge $V\subset Y$ mit

$$\varphi(U\cap X_0)=V\cap\varphi(X_0)=V\cap Y_0\,.$$

Es ist nun wieder $\pi\left(i_X\left(U\right)\cup i_Y\left(V\right)\right)\subset\left(X\sqcup Y\right)/\sim$ offen

$$\begin{aligned}
&\pi^{-1}\left(\pi\left(i_X\left(U\right)\cup i_Y\left(V\right)\right)\right)\\
= \;&\pi^{-1}\left(\bigcup_{x\in U\setminus X_0}\{[x]\}\cup\bigcup_{x\in U\cap X_0}\{[x]\}\cup\bigcup_{y\in V\setminus Y_0}\{[y]\}\cup\bigcup_{y\in V\cap Y_0}\{[y]\}\right)\\
= \;&\pi^{-1}\left(\bigcup_{x\in U\setminus X_0}\{[x]\}\right)\cup\pi^{-1}\left(\bigcup_{x\in U\cap X_0}\{[x]\}\right)\cup\pi^{-1}\left(\bigcup_{y\in V\setminus Y_0}\{[y]\}\right)\\
= \;&U\setminus X_0\cup\left(U\cap X_0\right)\cup\varphi\left(U\cap X_0\right)\cup V\setminus Y_0\\
= \;&U\cup\left(V\cap Y_0\right)\cup V\setminus Y_0=U\cup V\in\mathcal{O}\left(X\sqcup Y\right)\ .
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die folgende Gleichheit benutzt

$$\bigcup_{x\in U\cap X_0}\{[x]\}=\bigcup_{y\in V\cap Y_0}\{[y]\}\ .$$

Die beiden Inklusionen folgen aus $\varphi\left(U\cap X_0\right)=V\cap Y_0$. Vollkommen analog zum ersten Teil folgt nun die Offenheit von $\Phi\left(U\right)$ in $\vartheta_X\left(X\right)$ aus

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}\left(\pi\left(i_X\left(U\right)\cup i_Y\left(V\right)\right)\cap\vartheta_X\left(X\right)\right) &= \left(U\cup V\right)\cap\pi^{-1}\left(\bigcup_{x\in X}\{[x]\}\right)\\
&= \left(U\cup V\right)\cap\left(X\cup\varphi\left(X\right)\right)\\
&= \left(U\cup V\right)\cap\left(X\cup Y_0\right)\\
&= U\cup\varphi\left(U\cap X_0\right)\\
&= \pi^{-1}\left(\Psi\left(U\right)\right)\ .
\end{aligned}$$