Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Topologie Sommer 07

Aufgabe 16

a) Zeige, dass der offene Einheitsball $D^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, ||x|| < 1\right\} \subset \mathbb{R}^n$ (versehen mit der induzierten Topologie) homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Zeige, dass $D^n/\partial D^n$ (versehen mit der Quotienten-Topologie) homöomorph zur Sphäre S^n ist.

c) Zeige, dass die beiden Tori $S^1 \times S^1$ (versehen mit der Produkt-Topologie) und $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (versehen mit der Quotienten-Topologie) homöomorph zueinander sind.

d) Zeige, dass $S^m \wedge S^n = S^{m+n}$

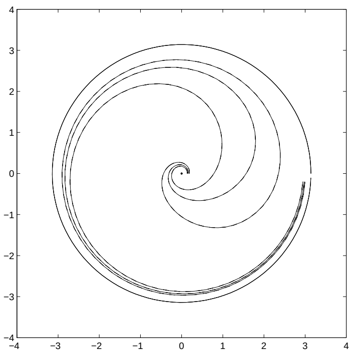
Aufgabe 17
Betrachte auf der komplexen Kreisscheibe $X := \{z \in \mathbb{C}|z| \leq 1\}$ die $\mathbb{R}$-Wirkung

$$(t, z) \mapsto \frac{ze^{t+it}}{1 + |z|(e^t - 1)}$$

a) Zeige, dass dies eine stetige $\mathbb{R}$-Wirkung auf X definiert.

b) Bestimme den Quotientenraum $X/\mathbb{R}$ und beschreibe alle offenen Mengen bzgl. der Quotienten-Topologie.

c) Untersuche, welche Punkte sich voneinander trennen lassen. Genauer: Finde maximale Teilräume, die T_1 und T_2 sind.



Aufgabe 18
Betrachte den topologischen Raum $X = M(n, \mathbb{C})$ und die Lie–Gruppe $G = Gl(n, \mathbb{C})$ mit der adjungierten Wirkung

$$\begin{array}{rcl} G \times X & \to & X \\ (P, A) & \mapsto & PAP^{-1} \end{array}$$

Eine Matrix $A \in X$ heisse *stabil*, wenn alle ihre Eigenwerte verschieden sind und *semi-stabil* wenn sie diagonalisierbar ist. Bezeichne die Menge der stabilen Matrize mit $M(n, \mathbb{C})_s$ und die der semi-stabilen Matrize mit $M(n, \mathbb{C})_{ss}$

a) Zeige, dass $M(n, \mathbb{C})_{ss}/G$ ein T_2-Raum ist, der das 2.Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

b) Zeige dass $M(n, \mathbb{C})_s/G$ eine Mannigfaltigkeit ist.

c) Wie sehen die Orbiten für einen semi-stabilen Punkt aus, wie sehen Umgebungen eines semi-stabilen aber nicht stabilen Punktes aus ($n = 2$)?

e) Zeige, dass $M(n, \mathbb{C})/G$ kein Hausdorff-Raum ist.