Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Topologie Sommer 2007

Aufgabe 19
Beweise, dass der Rand einer topologischen Mannigfaltigkeit eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 20
Seien M_1, M_2 topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand. Zeige: $M_1 \times M_2$ ist auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand und

$$\partial(M_1 \times M_2) = (\partial M_1 \times M_2) \cup (M_1 \times \partial M_2)$$

HINWEIS: Man überlege sich zunächst anschaulich, wie man die neuen Kartenabbildungen aus den alten bekommt.

Aufgabe 21 (Verkleben)
Sei $\varphi : X_0 \subset X \to Y$ stetige Abbildung. Wir haben in der Vorlesung die Anklebung von X an Y mithilfe von φ definiert: $Y \cup_\varphi X := (X \coprod Y)/\sim$ mit $\sim$ erzeugt durch $x \sim \varphi(x)$ für alle $x \in X_0$.

a) Zeige, dass Y zu einem Teilraum von $Y \cup_\varphi X$ homöomorph ist, falls φ stetig ist. Wann gilt dasselbe für X? Beweisen Sie die entsprechende Aussage aus der Vorlesung.

b) Welche Räume entstehen bei der Verklebung $X \cup_{id_{\partial X}} X$ von zwei Kopien von X entlang des Randes von X, wenn X die Vollkugel D^3, der Volltorus $S^1 \times D^2$ oder das Möbiusband ist?

Aufgabe 22 (Zusammenhängende Summe)
(1) Seien M_0 und M_1 topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension n. Seien Φ_i die Homöomorphismen $\Phi : D^n \to B_i$ der Einheitskugel D^n und bezeichne $\varphi_i := \Phi_i : \{i\} \times S^{n-1} \to M_i$ die Einschränkungen auf den Rand der Einheitskugel D^n. Zeige: Der topologische Raum $M_0 \sharp M_1 := ([0,1] \times S^{n-1} \cup M_0 \setminus B_0 \cup M_1 \setminus B_1')_{(\Phi_0 \cup \Phi_1)}$ ist eine Mannigfaltigkeit. Hinweis: Bilde die zusammenhängende Summe mit den Einschränkungen $Phi_i' := Phi_i|_{D^n_\epsilon}$ auf die kleineren Kugeln, D^n_ϵ vom Radius $\epsilon < 1$. Zeige, dass der so erhaltene Raum homöomorph zum ursprünglichen ist. Für diesen zeige dann die Behauptung.
(2) Experimentiere mit Kurven und Flächen. Wieviele verschiedene (nicht homöomorphe) zusammenhängende Summen kann man (höchstens) bilden?