Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 8

Topologie SS 2007

Abgabe 21.6.2007

Aufgabe 28
Sei A ein Funktor der einem topologischen Raum X ein algebraisches Objekt $A(X)$ (z.B. eine Gruppe) zuordnet. Zeigen Sie, dass dann jedem Homoöomorphismus $\varphi : X \to Y$ ein Isomorphismus der algebraischen Objekte

$$A(\varphi) : A(X) \cong A(Y)$$

zugeordnet wird.

Aufgabe 29
Sei M^2 eine geschlossene Fläche und $x \in M^2$ ein beliebiger Punkt. Zeige: Es existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $M^2 \setminus \{x\}$ homotop zur Einpunktvereinigung $S^1 \vee \ldots \vee S^1$ von k Kreislinien S^1 ist (für $k = 0$ sei dies ein Punkt). Was besagt k über die Fläche M^2 ?

Aufgabe 30

a) Sei $\varphi : \partial D^n \to \partial D^n$ ein gegebener Homöomorphismus. Konstruiere einen Homöomorphismus $\Phi : D^n \to D^n$ mit $\Phi|_{\partial D^n} = \varphi$.

b) Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $\sigma : [0,1] \to X$ eine stetige Abbildung mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x$, die homotop relativ $\{0,1\}$ zur konstanten Abbildung $\omega_x : [0,1] \to X$ mit $\omega_x(t) := x$ ist. Zeige, dass es eine stetige Abbildung $\Sigma : D^2 \to X$ gibt, so dass $\sigma \circ \exp = \Sigma|_{\partial D^2}$ wobei $\exp(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}t}$ sein soll.

Aufgabe 31

a) Seien $*, \bullet : G \times G \to G$ zwei Operationen auf einer Menge G mit folgender Eigenschaft:

   (i) Es existiert ein $e \in G$ mit $x = e * x = x * e = e \bullet x = x \bullet e \ \forall x \in G$.

   (ii) $(x_1 * x_2) \bullet (y_1 * y_2) = (x_1 \bullet y_1) * (x_2 \bullet y_2) \ \forall x_i, y_i \in G$.

   Zeige, dass dann $*$ und $\bullet$ übereinstimmen und ferner $x * y = y * x \ \forall x, y \in G$.

b) Sei nun $(G, \cdot)$ eine topologische Gruppe mit 1-Element e. Zeige, dass $\pi_1(G, e)$ eine abelsche Gruppe ist und dass für das Gruppenprodukt $*$ in $\pi_1(G, e)$ folgende Formel gilt:

$$[\sigma_1] * [\sigma_2] = [\sigma_1 \cdot \sigma_2]$$

   Dabei sind $\sigma_1, \sigma_2 : [0,1] \to G$ stetige Abbildungen mit $\sigma_i(0) = \sigma_i(1) = e$ $(i = 1,2)$ und $\sigma_1 \cdot \sigma_2 : [0,1] \to G$ ist definiert ist als $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(t) := \sigma_1(t) \cdot \sigma_2(t)$