Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 9

Topologie Sommer 2007

Abgabe 28.06.2005

Aufgabe 32 (Invarianz des Randes für $n = 2$)

(i) Zeige für die Kreisscheibe $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $x \in D^2$:

$$\pi_1\big(D^2 \setminus \{x\}\big) = \begin{cases} \{1\} & \text{für } x \in \partial D^2 \\ \mathbb{Z} & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) Sei $f : D^2 \to D^2$ ein Homöomorphismus, so gilt $f(\partial D^2) = \partial D^2$.

Aufgabe 33

(i) Skizziere folgende Homotopien mittels geeigneter Retrakte:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \setminus A &\simeq S^1 \vee S^2 \\ \mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B) &\simeq S^1 \vee S^1 \vee S^2 \vee S^2 \\ \mathbb{R}^3 \setminus (A \cup C) &\simeq S^1 \vee (S^1 \times S^1) \end{aligned}$$

(ii) Zeige, dass es in den folgenden beiden Fällen keinen Retrakt $r : X \to A$ gibt:

$$\begin{array}{ll} X = S^1 \times D^2 & A = \partial X = S^1 \times S^1 \\ X = \text{Möb} & A = \partial X \simeq S^1 \end{array}$$

Aufgabe 34

(i) Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum. Zeige: $\pi_1(X)$ ist eine *abelsche* Gruppe genau dann wenn für jeden Weg $h : I \to X$ der Isomorphismus $\beta_h : \pi_1(X, h(1)) \to \pi_1(X, h(0))$ nur von den Endpunkten $h(0), h(1)$ nicht aber vom konkreten Weg h abhängt.

(ii) Sei $\sigma : I \to X$ ein geschlossener Weg mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$. Zeige: $[\sigma]$ liegt im *Zentrum* von $\pi_1(X, x_0)$ genau dann wenn es eine Homotopie $f_t : X \to X$ gibt mit $f_0 = f_1 = id_X$ und $f_t(x_0) = \sigma(t)$.

Aufgabe 35

(1) Berechne die Fundamentalgruppe für jede geschlossene Fläche (kompakt und ohne Rand) aus der Liste. Hinweis: Benutze die Lösung zur Aufgabe 29 vom Blatt 8.
(2) Berechne die Fundamentalgruppe vom Linsenraum $L(p, q)$ (siehe Aufgabe 27, Blatt 7).