Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Topologie Sommer 2007

Abgabe 19.07.2007

Aufgabe 43
Sei M ein Möbiusband und ∂M sein (Mannigfaltigkeits-)Rand.

(i) Zeige: $(M, \partial M)$ ist ein *gutes Paar* und der Quotient $M/\partial M$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}P^2$.

(ii) Bestimme alle Gruppen und Abbildungen der langen exakten Sequenz des Paares $(M, \partial M)$:

$$\ldots \to H_n(\partial M) \to H_n(M) \to H_n(M, \partial M) \to H_{n-1}(\partial M) \to \ldots$$

(iii) Bestimme über die lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \widetilde{H}_n(A) \to \widetilde{H}_n(X) \to \widetilde{H}_n(X/A) \to \widetilde{H}_{n-1}(A) \to \ldots$$

die Homologiegruppen $H_n(\mathbb{R}P^2)$.

Aufgabe 44
Bezeichne CX den Kegel über X und EX die Einhängung von X (vgl. Aufgabe 40 (ii)) und betrachte geeignete Inklusionen $X \subset CX \subset EX$.

(i) Berechne die lange exakte Sequenz des Paares (CX, X).

(ii) Zeige, dass $H_{n+1}(EX)$ und $H_n(X)$ isomorph sind.

Tipp: Was hat das Paar (EX, CX) mit dem Paar (CX, X) zu tun ?

(iii) Finde eine explizite Abbildung $E : C_n(X) \to C_{n+1}(EX)$, die einen Isomorphismus $E_* : H_n(X) \to H_{n+1}(EX)$ induziert.

Tipp: E_* ist das Inverse der in (ii) konstruierten Abbildung.

Aufgabe 45

(i) Sei x_i ein Punkt in X_i, so dass (X_i, x_i) ein gutes Paar ist. Berechne die reduzierten Homologiegruppen der Einpunktvereinigung

$$\bigvee_i X_i \;=\; \coprod_i X_i \Big/ \coprod_i \{x_i\}$$

(ii) Berechne möglichst viele der reduzierten Homologiegruppen von $S^n \times S^m$ unter Verwendung der Homöomorphie

$$S^{m+n} \;\simeq\; S^m \times S^n \big/ S^m \vee S^n$$