Übungen zur Analysis für Informatiker

Humboldt-Universität zu Berlin, Sommersemester 2019
PD Dr.habil. Olaf Müller
Übungsblatt 10, Abgabe 21.6. in der Vorlesung

Es soll in jeder Aufgabe die Richtigkeit jeder Antwort bewiesen werden.
Hinweis: Auf der Rückseite gibt Emil, der gute Geist der Analysis, Tips/Spoiler!

Aufgabe 1: Mit Konstanten vormultiplizieren (8 Punkte)

1. Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar und sei $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Dann ist auch $g : C^{-1}I \to \mathbb{C}, x \mapsto f(C \cdot x)$ differenzierbar und $g'(x) = Cf'(C \cdot x)$.

2. Zeigen Sie, dass für ein komplexes Polynom P und eine komplexe Zahl z gilt: F ür $h(x) := P(z \cdot x)$ ist $h'(x) = zP'(z \cdot x)$. Gilt dasselbe, falls wir das Polynom ersetzen durch eine Potenzreihe in ihrem Konvergenzradius?

Aufgbabe 2: Zwei interessante Funktionen (8 Punkte)

Seien $f_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_\pm(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) \pm \exp(-x))$. Diskutieren Sie Asymptotik, kritische Punkte, lokale und globale Extremstellen dieser beiden Funktionen und berechnen Sie die Nullstellenmengen N_1 von $f_+'' - f_-$ und N_2 von $f_-'' - f_+$.

Aufgabe 3: Ihre ersten Differentialgleichungen! (8 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $b > a$. Sei $I := [a; b)$.

1. Zeigen Sie: Für $f : I \to \mathbb{C}$ gilt: $f^{(n)} = 0$ genau dann, wenn f ein Polynom von Grad höchstens $n - 1$ ist.

2. Sei f eine differenzierbare reelle Funktion auf I, und es gebe $c, C \in \mathbb{R}$ mit

$$cf(x) \leq f'(x) \leq Cf(x)$$

für alle $x \in I$. Zeigen Sie: Dann gilt für alle $x \in I$:

$$f(a)e^{c(x-a)} \leq f(x) \leq f(a)e^{C(x-a)}.$$

Nun sei g eine differenzierbare reelle Funktion auf einem Intervall I mit $g' = g$. Zeigen Sie: Es gibt ein $k \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = k \cdot \exp$.

3. Sei für ein Intervall I eine Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $h'' = -h$. Zeigen Sie: Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$. Wie kann man a, b bestimmen, d.h. von h ablesen, falls z.B. $I := [-1/10; 1/20)$?

4. Was gilt für $h'' = Ch$ für $C \in \mathbb{R}$ allgemein? Versuchen Sie alle Fälle zu beschreiben.

Aufgabe 4: Glatte Anschaltfunktion (8 Punkte)

1. Sei $f(x) := e^{-1/x^2}$ für alle $x > 0$ und $f(x) := 0$ für alle $x \leq 0$. Zeigen Sie: f ist eine unendlich oft differenzierbare Funktion.

2. Ist f um jeden Punkt als Potenzreihe entwickelbar?

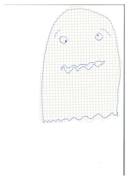

Abbildung 1: Emil

Hinweis zu Aufgabe 1.2: Sie dürfen benutzen, dass Theorem 6.4.7 auch für komplexe Polynome gilt (der Beweis für reelle und komplexe Polynome ist der gleiche).
Hinweis zu Aufgabe 3.2: Konzentrieren Sie sich auf eine der beiden Ungleichungen und trennen Sie nach den jeweiligen Abhängigkeiten.
Hinweis zu Aufgabe 3.3: Versuchen Sie, 3.2 zu benutzen. Benennen Sie dazu am besten $h' =: j$. Aufgabe 1 kann ebenfalls hilfreich sein (mit welchem Vorfaktor?).