Übungen zur Analysis für Informatiker

Humboldt-Universität zu Berlin, Sommersemester 2019
PD Dr.habil. Olaf Müller
Übungsblatt 11, Abgabe 28.6. in der Vorlesung

Es soll in jeder Aufgabe die Richtigkeit jeder Antwort bewiesen werden.
Hinweis: Auf der Rückseite gibt Emil, der gute Geist der Analysis, Tips/Spoiler!

Aufgabe 1: Beweislücken aus der Vorlesung (8 Punkte)

Beweisen Sie:

1. $\int : R[a;b] \to \mathbb{R}$ ist monoton (in Theorem 7.6);
2. $R[a;b]$ ist ein Unterring von $\mathrm{Abb}([a;b],\mathbb{R})$ (Zweites Lemma S. 119, Punkt 2).

Verwenden Sie jeweils nur die Tatsachen, die zum jeweiligen Zeitpunkt der Vorlesung schon bewiesen waren! Zeigen Sie zudem, dass beide Vektorräume unendlichdimensional sind. Beweisen Sie schließlich Theorem 7.8 (Intervall-Additivität des Integrals).

Aufgabe 2: Integrale berechnen (8 Punkte)

1. Für $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$: $\int_0^1 x^a (\ln x)^k dx = ?$;
2. $\int_0^\pi \sin^4(y) dy = ?$

Aufgabe 3: Noch mehr Integrale berechnen (8 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Berechnen Sie $\int_a^b x \sin(5x) dx$ und $\int_a^b \frac{1}{x \ln(x)} dx$.

Aufgabe 4: Kreissektoren (8 Punkte)

Sei K der Einheitskreis um 0 in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, für alle $x \in [-1;1]$: Der Flächeninhalt des Kreissektors, der durch 0 und die beiden Schnittpunkte von $\{(x,r) | r \in \mathbb{R}\}$ mit K bestimmt ist und dadurch, dass er $[0;1] \times \{0\}$ enthält, ist $\arccos(x)$.

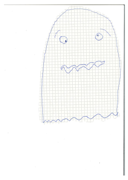

Abbildung 1: Emil

Hinweis zu Aufgaben 2 und 3: Partielle Integration und/oder Substitution sollten hilfreich sein, s. Skript.
Hinweis zu Aufgabe 4: Machen Sie sich eine Skizze! Es kann hilfreich sein, das Intervall $[-1; 1]$ nach dem auf dem Kreis überstrichenen Winkel umzuparametrisieren.