Übungen zur Analysis für Informatiker

Humboldt-Universität zu Berlin, Sommersemester 2019
PD Dr.habil. Olaf Müller
Übungsblatt 12, Abgabe 5.7. in der Vorlesung

Es soll in jeder Aufgabe die Richtigkeit jeder Antwort bewiesen werden.
Hinweis: Auf der Rückseite gibt Emil, der gute Geist der Analysis, Tips/Spoiler!

Aufgabe 1 : Limites berechnen (8 Punkte)

1. Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.
2. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$.

Aufgabe 2: Potenzreihen (8 Punkte)

Eine komplexe Folge $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ heißt **beschränkt durch** r, falls $|a(n)| \leq r \ \forall n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller durch $s \in [0;\infty)$ beschränkten Folgen heiße A_s. Die Potenzreihe $P(a)$ einer Folge a hatten wir definiert als Abbildung $P(a) : \mathbb{N} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $P(a)(n,z) := \sum_{k=0}^{n} a(k)z^k$. Für $p \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun $f_{n,a,r} : B(p,r) \to \mathbb{C}$ als $f_{n,a,r} := P(a)(n,\cdot)|_{B(p,r)}$, also durch $f_{n,a,r}(z) := P(a)(n,z) \ \forall z \in B(p,r)$ und

$$R_p := \sup\{r \geq 0 \mid \forall a \in A_5 : n \mapsto f_{n,a,r} \text{ konvergiert gleichgradig}\},$$

also R_p ist das Supremum aller Radien von Bällen um p, auf denen alle Potenzreihen um 0 mit durch 5 beschränkten Koeffizienten als Funktionenfolgen in $d_{\sup}$ konvergieren. Berechnen Sie $R_{2i/3}$ und R_1.

Aufgabe 3: Abschluss und gleichgradige Konvergenz (8 Punkte)

1. Sei $c : (0;\infty) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $c(t) := (1 - \frac{1}{t+1}) \cdot (\sin(t), \cos(t))$. Sei A der Abschluss von $C := c((0;\infty))$ in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $A \setminus C$.
2. Für eine Menge S und $f, g \in \mathbb{C}^S$ definieren wir $d_{\sup}(f,g) := \arctan(\delta(f,g))$ für $\delta(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0;\infty)\} < \infty$ und $d_{\sup}(f,g) = \pi/2$ sonst. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0;\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := nxe^{-nx}$. Berechnen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $d_{\sup}(f_n, 0)$. Konvergiert die Funktionenfolge f gleichgradig?

Aufgabe 4: Eine interessante Funktion (8 Punkte)

Sei eine Funktion $f : [0;\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \lim_{b\to\infty} \int_{1/b}^{b} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Zeigen Sie die Konvergenz des Limes auf der rechten Seite, indem Sie geeignete Abschätzungen für $t \in (0;1]$ und für $t \in [1;\infty)$ finden. Ist f stetig?
2. Für welches Polynom P gilt $f(x+1) = P(x) \cdot f(x)$? Berechnen Sie $f(5)$ (oder geben Sie generell einen einfacheren Ausdruck für $f(n)$ im Fall $n \in \mathbb{N}$).

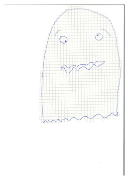

Abbildung 1: Emil

Hinweis zu Aufgabe 1.1: Versuchen Sie, Konstanten a_i zu finden mit $\frac{n^2}{n!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{(n-j)!}$ (*). Wie muss man k hier wählen (Asymptotik!)? Falls Sie nicht so weit kommen, nehmen Sie (*) als Ausgangspunkt.
Hinweis zu Aufgabe 1.2 Versuchen Sie es mit Riemannschen Summen.
Hinweis zu Aufgabe 3.1: Machen Sie sich unbedingt eine Skizze!