Übungen zur Analysis für Informatiker

Humboldt-Universität zu Berlin, Sommersemester 2019
PD Dr.habil. Olaf Müller
Übungsblatt 3, Abgabe 3.5., in der Vorlesung

Es soll in jeder Aufgabe die Richtigkeit jeder Antwort bewiesen werden.
Hinweis: Auf der Rückseite gibt Emil, der gute Geist der Analysis, Tips/Spoiler!

Aufgabe 1: Berechnung von Häufungspunkten (4 Punkte)

Ein **Häufungspunkt** einer Folge a ist der Limes einer konvergierenden Teilfolge von a.

1. Sei $r \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Menge der Häufungspunkte der komplexen Folge $a_r : n \mapsto r \cdot \frac{2^n}{(-1-\sqrt{3}i)^n} + \frac{1}{2^n}$, wobei $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.

2. Beweisen Sie: Eine beschränkte reelle Folge a, die nur einen Häufungspunkt b hat, konvergiert auf b. Geben Sie ein Gegenbeispiel zu derselben Behauptung ohne Beschränktheit. Finden Sie auch ein Beispiel einer reellen Folge ohne Häufungspunkt.

Aufgabe 2: Techniken für Folgen (4 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

1. Falls $\mathbb{N} \setminus b^{-1}(0)$ endlich ist, gilt $\lim(b) = 0$.

2. Falls $\mathbb{N} \setminus b^{-1}(0)$ endlich ist und a auf $p \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann konvergiert $a + b$ auch auf p (Wenn man also a an endlich vielen Stellen ändert, bleibt $\lim(a)$ gleich).

3. $\lim_{n\to\infty} a(n+1) = \lim_{n\to\infty} a(n)$.

4. Wenn a und c auf p konvergieren und $a(n) \leq b(n) \leq c(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert b auch auf p ('Sandwich-Technik').

Aufgabe 3: Teilfolgen (4 Punkte)

1. Sei A eine totalgeordnete Menge. Zeigen Sie: Jede Teilfolge einer (streng) monotonen Folge in A ist (streng) monoton.

2. Sei a eine konvergente reelle Folge und $a_\infty := \lim(a)$. Sei b eine Teilfolge von a. Zeigen Sie: b konvergiert und $\lim(b) = a_\infty$.

Aufgabe 4: Noch etwas zum Rechnen (4 Punkte)

1. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und alle $a \in \mathbb{C}^n$:

$$|\sum_{j=1}^{n} a_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|,$$

2. Berechnen Sie für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \neq 1$ und für $a_z : n \mapsto z^n$, ob und ggf. worauf a_z in Abhängigkeit von z konvergiert. **Bonusfrage**: Was passiert im Fall $|z| = 1$?

3. Sei K ein Körper und $a \in K \setminus (\{0\} \cup \{1\})$. Zeigen Sie: $\sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

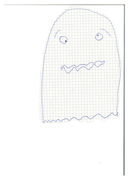

Abbildung 1: Emil

Hinweis zu Aufgabe 1.1: Berechnen Sie zuerst $\frac{2^n}{(-1-\sqrt{3}i)^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis zu Aufgabe 4.1: Führen Sie den Beweis induktiv und verwenden Sie die Dreiecksungleichung.