Übungen zur Analysis für Informatiker

Humboldt-Universität zu Berlin, Sommersemester 2019
PD Dr.habil. Olaf Müller
Übungsblatt 4, Abgabe 10.5., in der Vorlesung

Hinweis: Auf der Rückseite gibt Emil, der gute Geist der Analysis, Tips/Spoiler!
Es soll in jeder Aufgabe die Richtigkeit jeder Antwort bewiesen werden.

Aufgabe 1: Eine kleine Fast-Wiederholung (8 Punkte)

Sei $a > 0$ und $x(0) \in \mathbb{R}$. Wir definieren rekursiv eine reelle Folge x durch $x(n+1) := x(n) \cdot (2 - a \cdot x(n))$. Für welche Wahlen von $x(0)$ konvergiert x in $\mathbb{R}$, und wohin?

Aufgabe 2: Konkrete Folgen (8 Punkte)

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5+5n^2+\sqrt{n+1}}{6n^5+3n+\sqrt{n+3}}$ und $\lim_{n\to\infty}(1/n!)^{1/n}$.

Aufgabe 3: Potenzen (8 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir Potenzen für rationale Exponenten definiert. Für $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ und $r \in \mathbb{R}$ definieren wir nun: Falls $a \geq 1$, dann $a^r := \sup\{a^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq r\}$, ansonsten $a^r := 1/((1/a)^r)$.

1. Zeigen Sie für $a \geq 1$: $a^r = \inf\{a^q | q \in \mathbb{Q}, q \geq r\}$. Was gilt entsprechend für $a \leq 1$?
2. Sei $r \in \mathbb{R}$ und a eine reelle nichtnegative konvergente Folge. Zeigen Sie: $a^r : n \mapsto a(n)^r$ konvergiert auch und $\lim(a^r) = (\lim(a))^r$ ('Grenzwertsatz der Potenz').

Sei auch $a \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ mit $\mathrm{Acc}(a) \subset \{+\infty, -\infty\}$ und $s > 1$. Zeigen Sie: $\lim(a^{-s} + |a|^{1/s}) = \infty$.

Aufgabe 4: Summen von Reihen (8 Punkte)

1. Wie schon gesehen, ist für einen Körper K die Menge $K^{\mathbb{N}}$ mit gliedweiser Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum. Sei $V := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} | \Sigma(a) \text{ konvergiert}\}$. Zeigen Sie: V ist ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ und $\lim \circ \Sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist linear, d.h. zeigen Sie je für zwei solche Folgen a und b und für alle $l \in \mathbb{C}$: $\sum_{i=0}^{\infty}(la_i + b_i) = l\sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i$.
2. Seien $j_0, j_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $j_0(n) := 2n$ und $j_1(n) := 2n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Falls $A_i := \lim(\sum(a \circ j_i))$ existiert für alle $i \in \{0, 1\}$, dann existiert $\lim(\sum(a))$, und $\lim(\sum(a)) = \lim(\sum(a \circ j_0)) + \lim(\sum(a \circ j_1))$.

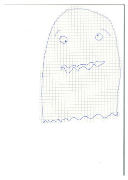

Abbildung 1: Emil

Hinweis zu Aufgabe 2: Für die zweite Rechnung kann es sinnvoll sein, als Zwischenschritt eine Abschätzung für $n!$ zu finden, in der die erste Hälfte und die zweite Hälfte der Faktoren getrennt abgeschätzt werden.