Übungen zur Analysis für Informatiker

Humboldt-Universität zu Berlin, Sommersemester 2019
PD Dr.habil. Olaf Müller
Übungsblatt 5, Abgabe 17.5., in der Vorlesung

Hinweis: Auf der Rückseite gibt Emil, der gute Geist der Analysis, Tips/Spoiler!
Es soll in jeder Aufgabe die Richtigkeit jeder Antwort bewiesen werden.

Aufgabe 1: Eine Fast-Wiederholung (8 Punkte)

Sei $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ und sei $x^{(a,b)} : n \mapsto \frac{(n+1)^a}{b^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Berechnen Sie $\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* | \Sigma(x^{(a,b)})$ konvergiert in $\mathbb{R}\}$.

Aufgabe 2: Umordnung (8 Punkte)

Wir hatten gesehen, dass die alternierende harmonische Reihe auf eine reelle Zahl konvergiert. Konstruieren Sie eine Bijektion $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{f(j)} \frac{1}{f(j)} = \infty$. Warum ist dies kein Widerspruch zu Theorem 4.25?

Aufgabe 3: Konvergenzradius... (8 Punkte)

1. Sei $r \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Konvergenzradius zur Potenzreihe $P(a)$ zu $a : n \mapsto n^r/n!$.
2. Sei $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definiert durch $a(n) = -\frac{2}{n}$ $\forall n \in 3\mathbb{N}$, $a(n) = 1/n^2$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$. Berechnen Sie den Konvergenzradius von $P(a)$ und beurteilen Sie die Konvergenz bei $z = 1$.

Aufgabe 4: ... und noch einmal Konvergenzradius (8 Punkte)

Schreiben Sie die folgenden Abbildungen $A_i : \mathbb{N} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als Potenzreihe[1] und berechnen Sie ihren Konvergenzradius:

$$A_1(n,z) := \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{(3j)!} z^{3j} \ \forall (n,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C},$$

$$A_2(n,z) := \sum_{j=0}^{n} (z^{j^3} + 4^j z^{2j}) \ \forall (n,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}.$$

---

[1] das heißt, wie in der Präsenzübung: Finden Sie eine Koeffizientenfolge a, so dass $P(a)$ einen positiven Konvergenzradius r hat und für alle z mit $|z| < r$ gilt: $\lim_{n\to} A(n,z) = \lim_{n\to\infty} P(a)(n,z)$

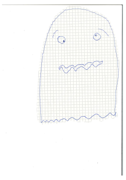

Abbildung 1: Emil

Hinweis zu Aufgabe 2: Wir hatten schon mehrmals die 'Blockmethode' in Beweisen gesehen, z.B. im Beweis der Nichtkonvergenz der harmonischen Reihe. Versuchen Sie auch hier, Blöcke von genügend großer positiver Summe zu verwenden.
Hinweis zu Aufgabe 4: In der ersten Teilaufgabe gehen Sie am besten ähnlich vor wie in der Präsenzübung. Im zweiten Teil nehmen Sie zunächst an, dass die Reihe konvergiert, und verwenden Sie z.B. eine frühere Aufgabe.