Übungen zur Analysis für Informatiker

Humboldt-Universität zu Berlin, Sommersemester 2019
PD Dr.habil. Olaf Müller
Übungsblatt 6, Abgabe 24.5., in der Vorlesung

Es soll in jeder Aufgabe die Richtigkeit jeder Antwort bewiesen werden.

Aufgabe 1: Die neuen Funktionen in Aktion (8 Punkte + 4 Bonuspunkte)

1. Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\Pi_{j=1}^{n}(2j-1)\right)$. Genauer: Drücken Sie das Ergebnis als Kombination von vier in der Vorlesung definierten Symbolen aus.

2. Seien $\omega \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\phi \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie: Es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} \sin(\omega x + \phi_k) = \alpha \sin(\omega x) + \beta \cos(\omega x)$$

3. **Bonusaufgabe:** Zeigen Sie: Es gibt auch $\gamma, \psi \in \mathbb{R}$ mit
$$\sum_{k=1}^{n} \sin(\omega x + \phi_k) = \gamma \sin(\omega x + \psi).$$
Dabei dürfen Sie annehmen, dass sin stetig ist (was wir noch nicht gezeigt haben!).

Aufgabe 2: Surjektivität einer fast-rationalen Funktion (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{x^3 - \sqrt{|x|}}{3x^2+5+\sin(x^3+44)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Ist f surjektiv?

Aufgabe 3: Stetige Zusammensetzungen (8 Punkte)

1. Berechnen Sie die Menge derjenigen $a \in \mathbb{R}$, für die $f_a : A := (0; \infty) \to \mathbb{R}, f_a(x) := x^a \cdot |x|$ $\forall x \in A$ eine stetige Ausdehnung auf $\mathbb{R}$ hat. Hierbei heißt für Mengen X, Y und $A \subset X$ eine Abbildung $f : X \to Y$ eine **Ausdehnung von** $g : A \to Y$ **auf** X, falls $f|_A = g$.

2. Seien $f, g : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ stetig und sei $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ für alle $x \in X$. Zeige Sie: h ist eine stetige Funktion.

Aufgabe 4: Fixpunkte und Limites (8 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig mit $f(U) \subset U$. Sei $r \in U$ und $a_r \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definiert durch $a_r(0) = r$ und $a_r(n+1) = f(a_r(n))$. Zeigen Sie: Falls a_r auf $b \in U$ konvergiert, dann gilt $f(b) = b$ (d.h. jeder mögliche Limes einer solchen Folge a_r ist ein Fixpunkt von f). Wenden Sie dies an auf den Fall $U := [-1; \infty)$ und $f : U \to \mathbb{R}, f(x) := \sqrt{1+x}$ $\forall x \in U$ und versuchen Sie zu ermitteln, wann die Folge konvergiert.