
Es soll in jeder Aufgabe die Richtigkeit jeder Antwort bewiesen werden.

Aufgabe 1: Zwei Metriken auf einer Menge (4 Punkte+2 Bonuspunkte)

Sei S eine Menge und d_1, d_2 Metriken auf S.

1. Sind $d_1 + d_2$, $d_1 \cdot d_2$, d_1^2, $\min\{d_1, d_2\}, \max\{d_1, d_2\}, d_1' := \frac{d_1}{1+d_1}$ stets Metriken?
2. Angenommen, dass gilt:
$$\forall x \in S \exists C_x > 0 \forall y \in S : C_x d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq C_x^{-1} d_2(x,y). \qquad (1)$$
Sind Konvergenz bezüglich d_1 und Konvergenz bezüglich d_2 stets äquivalent? Gilt dies für Konvergenz bezüglich d_1 und Konvergenz bezüglich d_1' wie in Aufgabe 1.1?
3. **Bonusfrage:** Finden Sie eine leichte Modifizierung der Bedingung 1, so dass es jede d_1-Cauchyfolge auch eine d_2-Cauchyfolge ist und umgekehrt?

Aufgabe 2: Metriken auf Produkten (4 Punkte+2 Bonuspunkte)

Seien (S_1, d_1) und (S_2, d_2) metrische Räume. Sei $S := S_1 \times S_2$, sei x_i die i-te Komponente von $x = (x_1, x_2)$. Welche der folgenden reellen Funktionen auf $S \times S$ sind Metriken auf S:

$$D(x,y) := \sqrt{d_1^2(x_1,y_1) + d_2^2(x_2,y_2)}, \quad E(x,y) := d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)?$$

Konvergiert eine Folge bezüglich einer solchen Metrik genau dann, wenn ihre Komponenten bezüglich der Metriken d_i konvergieren?
Bonusfrage: Die Definition für $\mathbb{R}$ verallgemeinernd, nennen wir eine Folge a in einem metrischen Raum (X,d) **Cauchy**, falls $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall M, N > n : d(a(M), a(N)) < \epsilon$, und (X,d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert. Wenn die d_i vollständig sind, ist dann D oder E i.A. vollständig?

Aufgabe 3: Abschlüsse berechnen (4 Punkte)

Berechnen Sie den Abschluss folgender Mengen in den jeweils zweitgenannten:

1. $A := (\mathbb{Q} \cap (0;\infty)) \setminus \{1/n | n \in \mathbb{N}^*\}$ in $(0;\infty)$;
2. A in $\mathbb{R}$;
3. A in $\mathbb{C}$;
4. $B := \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 | y < x^2\}$ in $\mathbb{Q}^2$;
5. B in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4: Surjektivität von Polynomen, Teil 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie die Umkehrung eines Theorems der Vorlesung: Sei P eine reelle Polynomfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zeigen Sie: Falls P surjektiv auf $\mathbb{R}$ ist, dann ist der Grad von P ungerade.