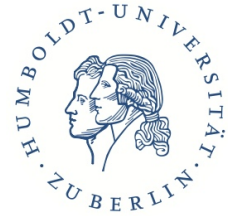


Übungen zur Analysis für Physiker

Humboldt-Universität zu Berlin, Wintersemester 2018/2019

PD Dr.habil. Olaf Müller

Übungsblatt 7, Abgabe 31.5. in der Vorlesung



Es soll in jeder Aufgabe die Richtigkeit jeder Antwort bewiesen werden.

Aufgabe 1: Zwei Metriken auf einer Menge (4 Punkte+2 Bonuspunkte)

Sei S eine Menge und d_1, d_2 Metriken auf S .

1. Sind $d_1 + d_2, d_1 \cdot d_2, d_1^2, \min\{d_1, d_2\}, \max\{d_1, d_2\}, d'_1 := \frac{d_1}{1+d_1}$ stets Metriken?
2. Angenommen, dass gilt:

$$\forall x \in S \exists C_x > 0 \forall y \in S : C_x d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq C_x^{-1} d_2(x, y). \quad (1)$$

Sind Konvergenz bezüglich d_1 und Konvergenz bezüglich d_2 stets äquivalent? Gilt dies für Konvergenz bezüglich d_1 und Konvergenz bezüglich d'_1 wie in Aufgabe 1.1?

3. **Bonusfrage:** Finden Sie eine leichte Modifizierung der Bedingung 1, so dass es jede d_1 -Cauchyfolge auch eine d_2 -Cauchyfolge ist und umgekehrt?

Aufgabe 2: Metriken auf Produkten (4 Punkte+2 Bonuspunkte)

Seien (S_1, d_1) und (S_2, d_2) metrische Räume. Sei $S := S_1 \times S_2$, sei x_i die i -te Komponente von $x = (x_1, x_2)$. Welche der folgenden reellen Funktionen auf $S \times S$ sind Metriken auf S :

$$D(x, y) := \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}, \quad E(x, y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)?$$

Konvergiert eine Folge bezüglich einer solchen Metrik genau dann, wenn ihre Komponenten bezüglich der Metriken d_i konvergieren?

Bonusfrage: Die Definition für \mathbb{R} verallgemeinernd, nennen wir eine Folge a in einem metrischen Raum (X, d) **Cauchy**, falls $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall M, N > n : d(a(M), a(N)) < \epsilon$, und (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert. Wenn die d_i vollständig sind, ist dann D oder E i.A. vollständig?

Aufgabe 3: Abschlüsse berechnen (4 Punkte)

Berechnen Sie den Abschluss folgender Mengen in den jeweils zweitgenannten:

1. $A := (\mathbb{Q} \cap (0; \infty)) \setminus \{1/n | n \in \mathbb{N}^*\}$ in $(0; \infty)$;
2. A in \mathbb{R} ;
3. A in \mathbb{C} ;
4. $B := \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 | y < x^2\}$ in \mathbb{Q}^2 ;
5. B in \mathbb{R}^2 .

Aufgabe 4: Surjektivität von Polynomen, Teil 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie die Umkehrung eines Theorems der Vorlesung: Sei P eine reelle Polynomfunktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zeigen Sie: Falls P surjektiv auf \mathbb{R} ist, dann ist der Grad von P ungerade.