Übungen zur Analysis für Informatiker

Humboldt-Universität zu Berlin, Sommersemester 2019
PD Dr.habil. Olaf Müller
Übungsblatt 8, Abgabe 7.6. in der Vorlesung

Es soll in jeder Aufgabe die Richtigkeit jeder Antwort bewiesen werden.

Aufgabe 1: Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit (8 Punkte)

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann heißt f **Lipschitz-stetig** mit Lipschitz-Konstante $a > 0$ g.d.w. gilt: $d(f(x), f(y)) \leq a \cdot d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie:

1. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
2. Die Funktionen $w_1, w_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, w_1(x) = \sqrt{x}\ \forall x \in \mathbb{R}^+$ und $w_2(x) = \sqrt{|\sin(x)|}\ \forall x \in \mathbb{R}^+$ sind nicht Lipschitz-stetig, aber gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^+$.
3. $\sin|_{\mathbb{R}}, \cos|_{\mathbb{R}}, (\sin + \cos)|_{\mathbb{R}}, (\sin \cdot \cos)|_{\mathbb{R}}$ sind gleichmäßig stetig.

Aufgabe 2: Konvergenz in der sup-Norm (8 Punkte)

Sei, für $x \in \mathbb{C}$ and $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) := \sin(\frac{2n}{3n+5}x)$. Welche der untenstehenden Funktionenfolgen konvergieren uniform, also in der sup-Metrik?

1. $n \mapsto f_n|_{B(0,1)}\ \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $n \mapsto f_n|_{[1,\infty)}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3: Differentiale berechnen (8 Punkte)

Wo sind folgende reelle Funktionen auf offenen Teilmengen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$ definiert, wo differenzierbar, und welches sind dort die Differentiale $(x, y \in \mathbb{R})$?

1. $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2+2x-1}{e^{x \cdot y^2}+y^2}$;
2. $\ln : (0; \infty) \to \mathbb{R}$ und $g : (x, y) \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + 2x^4})$;
3. $l : x \mapsto x \cdot |x|$;
4. $k : x \mapsto x^a$ für festes, aber beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Noch mehr Differentiale berechnen (8 Punkte)

1. Sei $a \in [0; \infty)$ und $f_a : (0; \infty) \to \mathbb{R}$ defined by $f_a(x) := x^a \sin(1/x)$ for all $x \in (0; \infty)$. Für welche a ist f_a stetig ausdehnbar auf $[0; \infty)$? Für welche a ist die entsprechende stetige Ausdehnung auch differenzierbar? Berechnen Sie $f_a'(0)$.
2. Berechnen Sie die Ableitungen der durch $x \mapsto x^x$ bzw. $x \mapsto x^{1/x^2}$ definierten Funktionen auf $(0, \infty)$.