Das Banach-Tarski-Paradox

Thomas Neukirchner*

Nicht-messbare Mengen verdeutlichen auf eindrucksvolle Weise, dass es keinen additiven - geschweige denn σ-additiven Volumenbegriff auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ des $\mathbb{R}^3$ geben kann, der zusätzlich invariant ist unter der Gruppe E^3 der Bewegungen:

Theorem 1 (Banach-Tarski (1924)). *Es sei $p \geq 3$ und $A, B \subset \mathbb{R}^p$ seien beschränkte Mengen mit nicht-leerem Inneren. Dann gibt es Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ und Bewegungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E^p$ mit*

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \varphi_i(A_i)$$

Setzt man z.B. $A = \overline{B_o^3} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|x - o\| \leq 1\right\}$ und $B = \overline{B_{o_1}^3} \sqcup \overline{B_{o_2}^3}$ (o_1, o_2 so gewählt, dass die Vereinigung disjunkt ist), so besagt der obige Satz, dass die Einheitskugel des $\mathbb{R}^3$ durch zerlegen in endlich viele Teile und euklidische Bewegungen verdoppelt werden kann. Für diese Version des auch als "Banach-Tarski-Paradox" bekannten Satzes zitieren wir im Folgenden einen Beweis aus [Deu93].

Bemerkung 1. Einen analogen Satz kann es im $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ nicht geben, da für diese Dimensionen das *Inhaltsproblem* lösbar ist (siehe [Els99, S.4]).

Definition 1. Sei $\mathcal{S} \subset E^p$ eine Untergruppe. $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ heissen $\mathcal{S}$-zerlegungsgleich, falls es Mengen $A_1, \dots, A_n \subset A$ und Bewegungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}$ gibt mit

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \varphi_i(A_i)$$

Offensichtlich ist $\mathcal{S}$-Zerlegungsgleichheit eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ und wir notieren $A \sim_{\mathcal{S}} B$.

Zur Vorbereitung einige kleine Lemmata:

*e-mail: neukirch@mathematik.hu-berlin.de - 25. April 2002

Lemma 1. *Sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreislinie. Dann gilt: $S^1 \sim_{SO(2)} S^1 \setminus \{1\}$.*

Beweis. Die Idee des Beweises ist für das Folgende sehr instruktiv. Sie besteht darin einen Halbgruppen-Homomorphismus $\Psi : \mathbb{N}_0 \to SO(2)$ zu betrachten[1], so dass die induzierte Wirkung auf S^1 *frei* ist[2]. Ein beliebiger Orbit $\Psi(\mathbb{N}_0)x \subset S^1$ steht also in Bijektion zu $\mathbb{N}_0$ und er ist invariant unter $\Psi(\mathbb{N}_0) \subset SO(2)$. Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} &S^1 = O \sqcup K \quad \text{ mit } O = \Psi(\mathbb{N}_0)(1), \quad K = S^1 \setminus O \\ &S^1 \setminus \{1\} = \Psi(1)(O) \sqcup K \end{aligned}$$

Es bleibt also die Abbildung Ψ zu erraten: $\Psi(m) = e^{im}$ (wirkt durch Multiplikation in $\mathbb{C}$ als Element in $SO(2)$) leistet das gewünschte, denn $(e^{im} = 1,\ m \in \mathbb{N}_0) \Leftrightarrow m = 0$. □

Sei nun $B^2 = \{x \in \mathbb{C} \mid \|x\| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $\overline{B^2}$ ihr Abschluss. Dann beweisst man analog zum obigen Lemma, indem man die Wirkung Ψ kanonisch auf $\overline{B^2} \setminus \{0\}$ fortsetzt:

Lemma 2. $\overline{B^2} \sim_{SO(2)} \overline{B^2} \setminus (0, 1]$.

Das Zentrum des Kreises bedarf einer gesonderten Behandlung, da $\Psi(\mathbb{N}_0)0 = 0$:

Lemma 3. $\overline{B^2} \sim_{E^2} \overline{B^2} \setminus \{0\}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \overline{B^2} \setminus \{0\} = \left(\overline{B^2} \setminus [0,1]\right) \sqcup (0,1] \sim_{E^2} \left(\overline{B^2} \setminus [0,1]\right) \sqcup [0,1) = \\ = B^2 \sqcup \left(S^1 \setminus \{1\}\right) \overset{Lemma\ 1}{\sim} B^2 \sqcup S^1 = \overline{B^2} \end{aligned}$$

□

Lemma 4. *Sei $D \subset S^1$ abzählbar. Dann gilt immernoch: $S^1 \sim_{SO(2)} S^1 \setminus D$.*

Beweis. Die Beweisidee ist dieselbe wie in Lemma 1. Allerdings muss Ψ nun so gewählt werden, dass $\Psi(m)(D) \cap D \neq \emptyset$ schon $m = 0$ impliziert (Vgl. Fussnote 2). Sei dazu

$$\Phi = \{\varphi \in [0, 2\pi) \mid \exists p \in D,\ \exists n \in \mathbb{N},\ e^{in\varphi} \cdot p \in D\}$$

---

[1] d.h. $\Psi(m + n) = \Psi(m) \cdot \Psi(n)$

[2] d.h. $\Psi(m)x = x$ für ein $x \in S^1$ impliziert $m = 0$

Da Φ abzählbar ist, existiert ein $\alpha \in [0, 2\pi) \setminus \Phi$. Wir setzten nun $\Psi(m) = e^{im\alpha}$. Damit gilt $\Psi(m)(D) \cap D = \emptyset$, $(m \neq 0)$ und $\Psi(m)(D) \cap \Psi(n)(D) = \emptyset$ $(m \neq n)$. Dies liefert folgende Zerlegungen:

$$S^1 = O \sqcup K \quad \text{mit } O = \Psi(\mathbb{N}_0)(D), \quad K = S^1 \setminus O$$
$$S^1 \setminus D = \Psi(1)(O) \sqcup K$$

□

Nun gehen wir zum $\mathbb{R}^3$ über. Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre.

Lemma 5. *Sei $D \subset S^2$ abzählbar. Dann gilt $S^2 \sim_{SO(3)} S^2 \setminus D$.*

Beweis. Da D abzählbar ist, gibt es eine Gerade durch 0, die kein Element aus D enthält. Diese Verwenden wir als Drehachse und übertragen den Beweis von Lemma 4 wortwörtlich. □

Abschliessend das Lemma, das eigentlich gebraucht wird:

Lemma 6. *Sei D eine abzählbare Menge von Durchmessern in $\overline{B^3}$, d.h. $d \in D$ ist von der Form $d = [-1, 1] \cdot v$, $v \in S^2$. Dann gilt: $\overline{B^3} \sim_{E^3} \overline{B^3} \setminus D$.*

Beweis. Der Schluss von Lemma 1 auf Lemma 2 überträgt sich auf die vorliegende Situation: Eine Wirkung auf S^2 induziert kanonisch eine Wirkung auf $\overline{B^3} \setminus \{0\}$. Damit erhält man aus Lemma 5: $\overline{B^3} \setminus D \sim_{SO(3)} \overline{B^3} \setminus \{0\}$. Nun wenden wir Lemma 3 auf $\overline{B^2} \subset \overline{B^3}$ an. □

* * *

Nun zum angekündigten Beweis der "Kugelverdopplung". Seien d_f, d_h zwei Durchmesser in $\overline{B^3}$ mit $\measuredangle(d_f, d_h) = \pi/4$ und sei:

- $F = \{id, f\}$ die von der Drehung f mit Drehwinkel π und Drehachse d_f erzeugte Gruppe.
- $H = \{id, h, h^{-1}\}$ die von der Drehung h mit Drehwinkel $2/3\pi$ und Drehachse d_h erzeugte Gruppe.

Lemma 7.

(i) $G := \langle F, H\rangle = F * H \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$.

(ii) Es existiert eine disjunkte Zerlegung $G = X \sqcup Y \sqcup Z$ *mit*

$$fX = Y \sqcup Z, \quad hX = Y, \quad h^{-1}X = Z \tag{$*$}$$

Beweis. Zu(i): Sei $g(\epsilon) = h^\epsilon f$ ($\epsilon = \pm 1$). Dann lässt sich jedes $g \in G$ schreiben als ein Wort von der Gestalt $g = a\, g_{\epsilon_1} g_{\epsilon_2} \dots g_{\epsilon_k}$, wobei $a \in \{id, f\}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\epsilon_i = \pm 1$ ($1 \leq i \leq k$). Zu zeigen ist, dass diese Darstellung von g eindeutig ist:

1) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle k-Tupel $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in \{\pm 1\}^k$ gilt:

$$g(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) := g_{\epsilon_1} g_{\epsilon_2} \dots g_{\epsilon_k} \notin \{id, f\}$$

Dazu wählen wir eine Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ in $\mathbb{R}^3$, so dass $d_f \in \mathbb{R}e_3$ und $d_h \in \mathbb{R}(e_3 - e_2)$. In einer solchen Basis gilt:

$$Mat(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Mat(h^\epsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\epsilon}{2}\sqrt{3/2} & \frac{\epsilon}{2}\sqrt{3/2} \\ \frac{\epsilon}{2}\sqrt{3/2} & -1/4 & -3/4 \\ \frac{\epsilon}{2}\sqrt{3/2} & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \tag{\#}$$

2) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle k-Tupel $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in \{\pm 1\}^k$ existieren $n_i := n_i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$, $i = 1, 2, 3$ mit:

$$n_1 \in 6\mathbb{Z}, \quad n_2 + n_3 \in 4\mathbb{Z} \quad n_2, n_3 \in \mathbb{Z}, \tag{2a}$$

so dass

$$Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_k)\big)_{1,i=1,2,3} = \left(\frac{1+n_1}{2^k},\ \frac{n_2}{2^k}\sqrt{3/2},\ \frac{n_3}{2^k}\sqrt{3/2}\right) \tag{2b}$$

Insbesondere folgt aus 2) sofort 1) und damit (i), da z.B. $Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_k)\big)_{1,1} \neq \pm 1$.

Wir beweisen 2) mittels vollständiger Induktion über k:

- Für $k = 1$ ersieht man aus (#) sofort: $n_1(\epsilon_1) = 0$, $n_2(\epsilon_1) = -\epsilon_1$, $n_3(\epsilon_1) = \epsilon_1$. Offensichtlich erfüllen die $n_i(\epsilon_1)$ die Eigenschaft $(2a)$.
- Sei nun $k \geq 1$ und $Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_k)\big)_{1,i=1,2,3} = \Big(\frac{1+n_1}{2^k},\ \frac{n_2}{2^k}\sqrt{3/2},\ \frac{n_3}{2^k}\sqrt{3/2}\Big)$, wobei die n_i die Eigenschaften $(2a)$ erfüllen sollen[3]. Durch Multiplikation von rechts mit $g(\epsilon_{k+1})$ erhält man:
$$Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_{k+1})\big)_{1,1} = \frac{1}{2^{k+1}}\big(\underbrace{1 + n_1 + \frac{3}{2}\epsilon_{k+1}(n_2 + n_3)}_{=n_1(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})}\big)$$
$$Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_{k+1})\big)_{1,2} = \frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{3/2}\,\big(\underbrace{-\epsilon_{k+1}(1 + n_1) - \frac{1}{2}n_2 + \frac{3}{2}n_3}_{=n_2(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})}\big)$$
$$Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_{k+1})\big)_{1,3} = \frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{3/2}\,\big(\underbrace{\epsilon_{k+1}(1 + n_1) - \frac{3}{2}n_2 + \frac{1}{2}n_3}_{=n_3(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})}\big)$$
Damit ist zum einen $Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_{k+1})\big)_{1,i=1,2,3}$ von der Gestalt (2b) und die Eigenschaft (2a) für die $n_i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k+1})$ lassen sich nun leicht aus denen für $n_i = n_i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$ herleiten.

Zu(ii): Wir definieren die Zerlegung von G rekursiv über die nach (i) eindeutig bestimmte Wortlänge $\#(g)$ eines Elementes $g \in G$ bzgl. der Buchstaben f, h, h^{-1}:

- $id \in X$, $(\#(id) = 0)$.
- Sei für $g \in G$ mit $\#(g) \leq n$ bereits definiert, in welcher der Mengen X, Y, Z es enthalten ist. Betrachte nun $a\,g$, $a \in \{f, h, h^{-1}\}$. Entweder ist $\#(a\,g) \leq n$ oder $\#(a\,g) = n + 1$. Nur für letzteren Fall muss definiert werden in welcher Menge $a\,g$ liegt:

	$g \in X$	$g \in Y$	$g \in Z$
$a = f$	Y	X	X
$a = h$	Y	Z	X
$a = h^{-1}$	Z	X	Y

Der Rest des Beweises ist nachrechnen. □

[3]Die Parameter ϵ_i seien an dieser Stelle zu Gunsten der Übersichtlichkeit unterdrückt.

In Lemma 1 haben wir die Eigenschaft $\mathbb{N}_0 \setminus \big(1+\mathbb{N}_0\big) = \{0\}$ durch eine *freie Wirkung* erfolgreich auf S^1 übertragen. Genauso wollen wir jetzt die Eigenschaft $(*)$ auf $\overline{B^3}$ übertragen.

Lemma 8. *Bezeichne d_g den die Drehachse von $g \in G$ repräsentierenden Durchmesser, sowie $D = \bigcup_{g\in G} d_g \subset \overline{B^3}$. Dann gilt*

(i) $G(D) = D$.

(ii) Die Wirkung von G auf $\overline{B^3} \setminus D$ ist frei.

Beweis. (i) Sei $d_k \subset D$ und $g, k \in G$. Dann gilt $gkg^{-1}\big(g(d_k)\big) = gk(d_k) = g(d_k)$. Mit anderen Worten $g(d_k) = d_{gkg^{-1}} \subset D$.

(ii) Die Wirkung ist wohldefiniert, da nach (i) $G\big(\overline{B^3} \setminus D\big) \subset \overline{B^3} \setminus D$. Sie ist frei, denn aus $g(x) = x$, $x \in \overline{B^3}$ folgt sofort $x \in d_g \subset D$. □

Man zerlegt nun $\overline{B^3} \setminus D$ in die Orbits bzgl. der G-Wirkung. In jedem Orbit wähle man einen Repräsentanten (Auswahlaxiom !) und bezeichne die Menge aller Repräsentanten mit R. Sei nun $A = X(R)$, $B = Y(R)$ und $C = Z(R)$. Dann gilt:

$$\overline{B^3} \setminus D = G(R) = A \sqcup B \sqcup C \quad \textit{und} \quad f(A) = B \sqcup C,\ h(A) = B,\ h^{-1}(A) = C$$

Das heisst

$$\boxed{A = fh(A) \sqcup fh^{-1}(A), \quad B = hf(B) \sqcup hfh(B), \quad C = h^{-1}f(C) \sqcup h^{-1}fh^{-1}(C)}$$

Damit lässt sich zunächst $\overline{B^3} \setminus D \sim_{SO(3)} \big(\overline{B^3} \setminus D) \sqcup (\overline{B^3} \setminus D)$ zeigen. Mit Lemma 6 folgt nun das Banach-Tarski-Paradox.

Literatur

[Deu93] W.A. Deuber, *Paradoxe Zerlegungen Euklidischer Räume*, Elemente der Mathematik **48** (1993), 61–75.

[Els99] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer, 99.