Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Nicolas Perkowski
Dipl.-Math. Jana Bielagk

Übungsaufgaben zur Stochastik

Aufgabe 5.1 (5 Punkte)
Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $\sum_{x:p_X(x)>0} |x|p_X(x) < \infty$ und $\sum_{x:p_X(x)>0} x^2 p_X(x) < \infty$. Zeigen Sie, dass X genau dann deterministisch ist (d.h. $p_X(x_0) = 1$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$) wenn $\mathrm{Var}(X) = 0$.

Aufgabe 5.2 (5 Punkte)
Eine (ideale) Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal Zahl erscheint. Ist das beim n-ten Wurf der Fall, gewinnen Sie 2^{n-1} Euro. Sei X die Zufallsvariable, die die Auszahlung dieses Spiels modelliert. Geben Sie die Massefunktion von X an und berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Welchen Preis wären Sie bereit für die Teilnahme an diesem Spiel zu bezahlen?

Aufgabe 5.3 (5 Punkte)
Der Besitzer einer Kunstgalerie versichert ein besonders wertvolles Bild gegen Diebstahl. Die Versicherungssumme beträgt 500.000 Euro. Die Versicherung verlangt eine Prämie von 2500 Euro. Nach Abzug der Kosten bleibt ihr eine Nettoprämie von 2100 Euro. Die Versicherung kalkuliert die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Versicherungsfalls mit 0,003. Wenn sie einen Wachschutz beauftragt, sinkt nach ihren Erfahrungen die Wahrscheinlichkeit auf 0,001.

a) Bestimmen Sie für beide Varianten (mit/ohne Wachschutz) den Erwartungswert und die Varianz des Nettogewinns.

b) Wie teuer darf der Wachschutz sein, damit der Erwartungswert des Nettogewinns der Versicherung abzüglich der Kosten für den Wachschutz nicht kleiner ist als ohne Wachschutz.

Aufgabe 5.4 (5 Punkte)
Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - F_X(n)).$$

Abgabe: Montag, 28. November 2016.
(Sie dürfen Ihre Lösungen in Zweiergruppen abgeben. Geben Sie bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt ab und schreiben Sie auf alle Zettel Namen und die Übungsgruppe.)