Aufgaben Diskrete Mathematik II

Differenzenrechnung

1. Bestimmen Sie eine Formel für die Summe $\sum_{i=1}^{n} i^5$.

2. Ermitteln Sie die diskreten Ableitungen von $f(n) = (-1)^n$, $g(n) = |n|$ und $h(n) = 4^n$.

3. Berechnen Sie eine diskrete Stammfunktion von $2^x \cdot x^2$. Benutzen Sie partielle Summation: $F = \sum f, G = \sum g \Rightarrow \sum Fg = FG - \sum f \cdot TG$, wobei $TG(n) = G(n+1)$.

4. Wie viele Partitionen einer 8-elementigen Menge in drei (nicht-leere) Teilmengen gibt es?

Erzeugende Funktionen

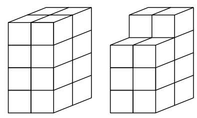
5. Geben Sie die Reihenentwicklungen der folgenden Funktionen an:

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad e^x, \quad (1+x)^k, \quad \sqrt{1+x}.$$

6. Finden Sie eine Formel für die Terme der durch die Rekursion $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ mit $a_0 = 3$ und $a_1 = 5$ gegebenen Folge.

7. Stellen Sie die erzeugende Funktion der durch die Rekursion $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} + \ldots + nb_0$ mit $b_0 = 1$ gegebenen Folge in geschlossener Form dar.

8. Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, einen Turm aus $2 \times 2 \times n$ Einheitsquadern mit $2n$ Bausteinen des Formats $1 \times 1 \times 2$ zu bauen. Betrachten Sie dafür parallel die gleiche Aufgabe mit einem solchen Turm, in dessen oberster Schicht ein $2 \times 1 \times 1$-Stein fehlt.



9. Es sei c_n die Anzahl aller Wörter der Länge $2n$ mit genau n Buchstaben X und und n Buchstaben Y, wobei jedes Anfangsstück des Wortes mindestens genauso viele X wie Y enthalte. (Jedes solche Wort beginnt also mit X und endet mit Y. Zulässige Wörter sind XY, $XYXY$, $XXYY$, nicht aber XX, $XYYX$.) Bestimmen Sie die Folge (c_n).

Algebraische Graphentheorie

10. Berechnen Sie die Spektren des vollständigen Graphen K_4, des Pfadgraphen $P_4 = A_4$ und des Zykelgraphen $Z_4 = \tilde{A}_3$.

11. Es sei G ein bipartiter Graph. Zeigen Sie, dass das Spektrum von G symmetrisch ist: $\lambda \in \mathrm{Spek}(G) \implies -\lambda \in \mathrm{Spek}(G)$ (auch mit Vielfachheiten).

12. Es sei G ein k-regulärer Graph. Zeigen Sie, dass k ein Eigenwert von G ist und das Spektrum absolut beschränkt: $\lambda \in \mathrm{Spek}(G) \implies |\lambda| \leq k$.

13. Finden Sie eine Formel für das charakteristische Polynom eines unzusammenhängenden Graphen $G = G_1 + G_2$ (drücken Sie also p_G durch p_{G_1} und p_{G_2} aus, wobei G_1 und G_2 disjunkte Untergraphen von G sind).

14. Zeigen Sie, dass der bipartite Graph $K_{1,4} = \tilde{D}_4$ und der unzusammenhängende Graph $P_1 + Z_4$ isospektral sind, also das gleiche Spektrum haben (mit Vielfachheiten).