Aufgaben Diskrete Mathematik II

Differenzenrechnung

1. Bestimmen Sie eine Formel für die Summe $\sum_{i=1}^{n} i^5$.

Lösung: Zunächst muss x^5 als Linearkombination der fallenden Potenzen $1 = x^{\underline{0}}, x = x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, x^{\underline{3}}, x^{\underline{4}}, x^{\underline{5}}$ dargestellt werden. Das geht von Hand oder, einfacher, mit den Stirling-Zahlen:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}.$$

Damit ist für $n = 5$

$$\begin{aligned} x^5 &= S_{5,0} + S_{5,1}x + S_{5,2}x^{\underline{2}} + S_{5,2}x^{\underline{3}} + S_{5,2}x^{\underline{4}} + S_{5,2}x^{\underline{5}} \\ &= x + 15x^{\underline{2}} + 25x^{\underline{3}} + 10x^{\underline{4}} + x^{\underline{5}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{n} x^5 &= \sum_{x=1}^{n} x + 15x^{\underline{2}} + 25x^{\underline{3}} + 10S_{5,2}x^{\underline{4}} + x^{\underline{5}} \\ &= \left[\frac{1}{2}x^{\underline{2}} + \frac{15}{3}x^{\underline{3}} + \frac{25}{4}x^{\underline{4}} + \frac{10}{5}x^{\underline{5}} + \frac{1}{6}x^{\underline{6}}\right]_1^{n+1} \\ &= \frac{1}{12}\Big(2(n+1)^{\underline{6}} + 25(n+1)^{\underline{5}} + 75(n+1)^{\underline{4}} + 60(n+1)^{\underline{3}} + 6(n+1)^{\underline{2}}\Big) \end{aligned}$$

2. Ermitteln Sie die diskreten Ableitungen von $f(n) = (-1)^n$, $g(n) = |n|$ und $h(n) = 4^n$.

Lösung: $\Delta f(n) = -2(-1)^n = -2f(n), \qquad \Delta g(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ -1, & n < 1 \end{cases}, \qquad \Delta h(n) = 3 \cdot 4^n.$

3. Berechnen Sie eine diskrete Stammfunktion von $2^x \cdot x^2$. Benutzen Sie partielle Summation: $F = \sum f, G = \sum g \Rightarrow \sum Fg = FG - \sum f \cdot TG$, wobei $TG(n) = G(n+1)$.

Lösung: Es ist $\sum 2^x \cdot x = 2^x \cdot x - \sum 2^{x+1} = 2^x(x-2)$. Das gibt, zusammen mit $\Delta x^2 = 2x + 1$

$$\begin{aligned} \sum 2^x \cdot x^2 &= 2^x \cdot x^2 - \sum (2x+1)2^{x+1} = 2^x \cdot x^2 - \sum (4x+2)2^x \\ &= 2^x \cdot x^2 - 2 \cdot 2^x - 4\sum 2^x \cdot x \\ &= 2^x \cdot (x^2 - 2) - 4 \cdot 2^x(x-2) \\ &= 2^x \cdot (x^2 - 4x + 6). \end{aligned}$$

Machen Sie die Probe!

4. Wie viele Partitionen einer 8-elementigen Menge in drei (nicht-leere) Teilmengen gibt es?

Lösung: Gesucht ist die Stirling-Zahl $S_{8,3}$. Wir berechnen sie mit der Rekursionsformel $S_{n+1,k} = k \cdot S_{n,k} + S_{n,k-1}$:

	$k = 1$	2	3	4	
$n = 1$	1				
2	1	1			
3	1	3	1		
4	1	7	6	1	
5	1	15	25	10	1
6	1	31	80	…	
7	1	63	271	…	
8	1	127	**876**	…	

Erzeugende Funktionen

5. Geben Sie die Reihenentwicklungen der folgenden Funktionen an:

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad e^x, \quad (1+x)^k, \quad \sqrt{1+x}.$$

Lösung:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \qquad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n\geq 0} x^{2n}, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n,$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n, \qquad (1+x)^k = \sum_{n\geq 0} \binom{k}{n} x^n, \qquad \sqrt{1+x} = \sum_{n\geq 0} \frac{(1/2)^{\underline{n}}}{n!} x^n.$$

6. Finden Sie eine Formel für die Terme der durch die Rekursion $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ mit $a_0 = 3$ und $a_1 = 5$ gegebenen Folge.

Lösung: Mit $A(x) := \sum_n a_n x^n$ ist durch Rekursion $\frac{1}{x^2}(A(x) - 5x - 3) = \frac{2}{x}(A(x) - 3) + 3A(x)$ und dann

$$A(x) = \frac{x-3}{3x^2+2x-1} = \frac{x-3}{(3x-1)(x+1)} = \frac{2}{1-3x} + \frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} 2\cdot 3^n x^n + (-1)^n x^n$$

und demnach $a_n = (-1)^n + 2\cdot 3^n$.

7. Stellen Sie die erzeugende Funktion der durch die Rekursion $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} + \ldots + nb_0$ mit $b_0 = 1$ gegebenen Folge in geschlossener Form dar.

Lösung: Die zur Folge (b_n) gehörende erzeugende Funktion ist

$$B(x) := \sum_{n\geq 0} b_n x^n = 1 + x + 3x^2 + 8x^3 + \cdots$$

Wir benutzen die Rekursionsformel:

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{i=0}^{n} (n-i) b_i \Big) x^n.$$

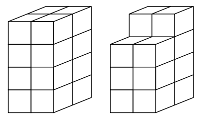
Die Koeffizienten entstehen also durch Konvolution der Folge (B_n) mit der Folge $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Die erzeugende Funktion dieser Folge ist $x/(1-x)^2$. Die Funktionen $B(x)$ und $x/(1-x)^2 \cdot B(x)$ stimmen in allen Graden üeberein, bis auf den konstanten Term, der für $B(x)$ gleich 1 ist; bei dem Produkt aber 0. Wir erhalten

$$B(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \cdot B(x) + 1$$

und durch Umstellen

$$B(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{(1-x)^2}} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 - x} = \frac{(1-x)^2}{1-3x+x^2}$$

Bemerkung: Es ist b_n die $2n$-te Fibonacci-Zahl, was auch mit den erzeugenden Funktionen $B(x)$ und $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ gezeigt werden kann.



8. Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, einen Turm aus $2 \times 2 \times n$ Einheitsquadern mit $2n$ Bausteinen des Formats $1 \times 1 \times 2$ zu bauen. Betrachten Sie dafür parallel die gleiche Aufgabe mit einem solchen Turm, in dessen oberster Schicht ein $2 \times 1 \times 1$-Stein fehlt.

Lösung: Doppelrekursion mit $a_n = 2a_{n-1} + 4b_{n-1} + a_{n-2} + \delta_{n,0}$ (für den $2 \times 2 \times n$-Turm) und $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ (wenn ein Stein fehlt). Damit für die erzeugenden Funktionen $A = 2zA + 4zB + z^2A + 1$ und $B = zA + zB$; insgesamt $A(z) = \frac{1-z}{(1+z)(1-4z+z^2)}$.

9. Es sei c_n die Anzahl aller Wörter der Länge $2n$ mit genau n Buchstaben X und und n Buchstaben Y, wobei jedes Anfangsstück des Wortes mindestens genauso viele X wie Y enthalte. (Jedes solche Wort beginnt also mit X und endet mit Y. Zulässige Wörter sind XY, $XYXY$, $XXYY$, nicht aber XX, $XYYX$.) Bestimmen Sie die Folge (c_n).

Lösung: c_n ist die n-te Catalan-Zahl. Sie sollten das Bestimmung von c_1, c_2, c_3, c_4 herausfinden und dann zeigen, dass c_n derselben Rekursionsformel genügt wie die Catalan-Zahlen: $c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \ldots + c_nc_0$.

Algebraische Graphentheorie

10. Berechnen Sie die Spektren des vollständigen Graphen K_4, des Pfadgraphen $P_4 = A_4$ und des Zykelgraphen $Z_4 = \tilde{A}_3$.

Lösung: $\mathrm{Spek}(K_4) = \{-1, -1, -1, 3\}$, $\mathrm{Spek}(Z_4) = \{-2, -0, -0, 2\}$, $\mathrm{Spek}(P_4) = \{\pm\frac{1}{2}(\pm 1 + \sqrt{5})\}$.

Für Z_4 kann man ohne Rechnung folgendermaßen argumentieren: 0 ist Eigenwert, weil $A(Z_4)$ nicht vollen Rang hat; 2 ist Eigenwert, weil der Graph 2-regulär ist (Aufgabe 12); -2 ist Eigenwert, weil Z_4 bipartit ist, also symmetrisches Spektrum hat (Aufgabe 11); die Summe aller Eigenwerte ist 0.

Zu P_4: das charakteristische Polynom ist $t^4 - 3t^2 + 1$, also biquadratisch (keine Terme ungeraden Grades) und kann daher mit zweifacher quadratischer Ergänzung faktorisiert werden: $(t^2 - 3/2)^2 = 5/4$ und damit $t = \pm\sqrt{3/2 \pm \sqrt{5}/2}$. Eine einfache, aber nicht notwendige Rechnung, zeigt $\sqrt{3/2 + \sqrt{5}/2} = (1 + \sqrt{5})/2$ usw.

11. Es sei G ein bipartiter Graph. Zeigen Sie, dass das Spektrum von G symmetrisch ist: $\lambda \in \mathrm{Spek}(G) \implies -\lambda \in \mathrm{Spek}(G)$ (auch mit Vielfachheiten).

Lösung: G bipartit bedeutet, dass es eine diskjunkte Zerlegung der Eckenmenge $E(G) = E_1 \cup E_2$ gibt, wobei alle Kanten von E_1 nach E_2 gehen. Wir nummerieren die Ecken von G, indem erst E_1 und dann E_2 auftritt. Damit hat die Adjazenzmatrix die Blockform

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K^t & 0 \end{pmatrix},$$

wobei K eine (nicht notwendigerweise quadratische) Matrix ist. Wir schreiben Vektoren ebenfalls in Blockform: $v = \left(\begin{smallmatrix} v' \\ v'' \end{smallmatrix}\right)$. Die Eigenwertgleichung $A(G)v = \lambda v$ bedeutet $Kv'' = \lambda v'$ und $K^t v' = \lambda v''$. Der in einer Komponente veränderte Vektor $\left(\begin{smallmatrix} -v' \\ v'' \end{smallmatrix}\right)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$, denn $\left(\begin{smallmatrix} 0 & K \\ K^t & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -v' \\ v'' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda v' \\ -\lambda v'' \end{smallmatrix}\right) = -\lambda\left(\begin{smallmatrix} -v' \\ v'' \end{smallmatrix}\right)$.

12. Es sei G ein k-regulärer Graph. Zeigen Sie, dass k ein Eigenwert von G ist und das Spektrum absolut beschränkt: $\lambda \in \mathrm{Spek}(G) \implies |\lambda| \leq k$.

Lösung: Es sei $v = (1, \ldots, 1)^T$ der Vektor mit allen Einträgen 1. Dann ist $Av = kv$, denn mit G k-regulär sind alle Zeilensummen gleich k. Nun ist v ein positiver Eigenvektor, also der Perron-Frobenius-Eigenvektor und somit ist der zugehörige Eigenwert k der maximale reelle (Perron-Frobenius-)Eigenwert $\lambda_0(G)$, d.h. $|\lambda| \leq \lambda_0(G) = k$ für jeden weiteren Eigenwert λ von G.

13. Finden Sie eine Formel für das charakteristische Polynom eines unzusammenhängenden Graphen $G = G_1 + G_2$ (drücken Sie also p_G durch p_{G_1} und p_{G_2} aus, wobei G_1 und G_2 disjunkte Untergraphen von G sind).

Lösung: $p_G = p_{G_1} \cdot p_{G_2}$.
Hier hat die Adjazenzmatrix Blockform $A(G) = \left(\begin{smallmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{smallmatrix}\right)$.

14. Zeigen Sie, dass der bipartite Graph $K_{1,4} = \tilde{D}_4$ und der unzusammenhängende Graph $P_1 + Z_4$ isospektral sind, also das gleiche Spektrum haben (mit Vielfachheiten).

Lösung: $\mathrm{Spek}(K_{1,4}) = \{-2, 0, 0, 0, 2\}$. Man kann die Rechnung durch das folgende Argument vermeiden: $A(K_{1,4})$ hat Rang 2, so dass 0 ein dreifacher Eigenwert ist. Außerdem ist wegen $K_{1,4} = \tilde{D}_4$ der maximale reelle Eigenwert gleich 2, und schließlich ist auch -2 ein Eigenwert, weil die Spur von $A(K_{1,4})$ gleich 0 ist.

Das Spektrum von $P_1 + Z_4$ kann ebenfalls durch Ausrechnen bestimmt werden, es geht aber auch ohne: $\mathrm{Spek}(Z_4) = \{-2, 0, 0, 2\}$, da 2-regulär ist (also maximaler Eigenwert gleich 2) und bipartit (also auch -2 Eigenwert); außerdem hat $A(Z_4)$ nur Rang 2, also ist 0 doppelter Eigenwert. Mit Aufgabe 12 ist dann $\mathrm{Spek}(P_1 + Z_4) = \{-2, 0, 0, 0, 2\}$.