Aufgaben Diskrete Mathematik I — Kombinatorik

1. Bestimmen Sie die Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.
Lösung: $n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$, insbesondere $n!$ für $k = n$ und 0 für $k > n$.

2. Wie viele „Wörter“ kann man aus `MISSISSIPPI` bilden?
Lösung: $11!/4!4!2! = 34650$.

3. Wir benutzen ein Kartenspiel mit kn Karten in k Farben und n Werten; dabei $n \geq 5$ und $k \geq 2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, beim Ziehen von fünf zufälligen Karten eine der folgenden Kombinationen zu erhalten:
(a) Vierling; (b) Full House; (c) Drilling; (d) Doppelpärchen; (e) Pärchen; (f) Straße;
(g) Flush, also alle Karten von gleicher Farbe; (h) Royal Flush, also einfarbige Straße.
Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen für $k = 4$, $n = 13$ aus der Vorlesung.

4. Was ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von vier Würfeln als Produkt 36 zu erhalten?
Lösung: 2,7%.

5. Beim 6-aus-49 Spiel eines Lotto-Unternehmens gibt es eine Million Euro für den richtigen Tipp. Um Kunden zu halten, bietet ein privates Spielcasino eine Million Euro denjenigen, die das folgende Spiel gewinnen — welches Spiel sollte ein Glücksritter bevorzugen?
In einer Urne sind 24 graue Kugeln sowie fünf bunte Kugeln mit den Buchstaben B, G, I, N, O. Man zieht fünf Mal und gewinnt, wenn man die Buchstabenkugeln in der richtigen Reihenfolge (BINGO) findet.
Lösung: $P(\text{Lotto}) = 1/\binom{49}{6} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44} < P(\text{Bingo}) = \frac{1}{29}\cdot\frac{1}{28}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{26}\cdot\frac{1}{25}$

6. Drei eingefleischte Glücksspielerinnen treffen sich, um um einen größeren Betrag zu spielen. Jede spielt nach eigenen Regeln. Berechnen Sie, wessen Spiel die größte bzw. kleinste Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

a) Anna bringt einen Beutel mit, der die Buchstaben A,A,A,N,N enthält. Sie gewinnt, wenn sie beim Ziehen von vier Buchstaben ihren Namen auslegt.
b) Berta bringt ein Standardkartenspiel mit (52 Karten) und gewinnt, wenn sie drei Karten zieht und wenigstens ein rotes As (Karo-As oder Herz-As) findet.
c) Carola würfelt mit vier Würfeln und gewinnt, wenn die Summe der Augenzahlen genau 13 ist.

Lösung: a) Es gibt $5\cdot4\cdot3\cdot2$ Möglichkeiten, vier Buchstaben aus dem Sack zu ziehen (keine Anordnung, ohne Zurücklegen). Davon sind günstig: $3\cdot2\cdot1\cdot2$ (für das erste A gibt es drei Chancen, für das erste N zwei usw.) Die Wahrscheinlichkeit P_A ist also $12/120 = 1/10$.
Alternativ: $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = 6/60 = 1/10$.

b) Es gibt $\binom{52}{3}$ Weisen, drei Karten zu ziehen. Davon haben $\binom{2}{1}\cdot\binom{50}{2}$ genau ein rotes As und $\binom{2}{2}\cdot 50$ beide roten Asse. Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit also $P_B = (2\cdot50\cdot49/2 + 50)/(52\cdot51\cdot50/6) = 25/221$.
Alternativ: Unter den $\binom{52}{3}$ Tripeln gibt es $\binom{50}{2}$, die keines der beide roten Asse enthalten. Die Wahrscheinlichkeit P_B ist also

$$1 - \binom{50}{3}\Big/\binom{52}{3} = 1 - \frac{50\cdot49\cdot48}{52\cdot51\cdot50} = 1 - \frac{49\cdot4}{17\cdot13} = \frac{221-196}{221} = \frac{25}{221}.$$

c) 6^4 mögliche Ergebnisse insgesamt, unter Berücksichtigung der Reihenfolge.
Liste aller Möglichkeiten, 13 als Summe zu erhalten (ohne Reihenfolge): 6511, 6421, 6331, 6322, 5521, 5431, 5422, 5332, 4441, 4432, 4333. Anzahl der Möglichkeiten, 13 zu erhalten (mit Reihenfolge) — $4! = 24$ Permutationen, falls alle vier Zahlen verschieden sind; $12 = 4!/2!$ bei einem Paar und $4 = 4!/4!$ bei einem Dreier:

$$24\cdot2 + 12\cdot7 + 4\cdot2 = 48 + 96 + 8 = 140,$$

die Wahrscheinlichkeit ist also $140/6^4 = 35/9\cdot36$.

Mit $P_A = \frac{1}{10}$, $P_B = \frac{25}{221}$ und $P_C = \frac{35}{9\cdot36}$ ist $P_A < P_B$ (wegen $221 < 10\cdot25 = 250$), $P_B > P_C$ (wegen $25\cdot9\cdot36 = 8100 > 7735 = 221\cdot35$) und $P_A < P_C$ (wegen $9\cdot36 = 324 < 350 = 10\cdot35$).

7. Beim Backgammon kann der Spieler am Zug seinem Gegner anbieten, das Spiel zu *verdoppeln.* Lehnt der Gegner ab, so hat er das Spiel (zum einfachen Wert) verloren; nimmt er an, wird um den zweifachen Einsatz weitergespielt.
Wenn Ihnen die Verdopplung angeboten wird, wie reagieren Sie? Die Antwort sollte natürlich von der Wahrscheinlichkeit abhängen, dass Sie das Spiel in der aktuellen Position gewinnen. (Diese Wahrscheinlichkeit ist selbstverständlich nie genau bekannt, aber gute Backgammon-Spieler können sie recht präzise abschätzen.)

Lösung: Sie sollten die Verdopplung akzeptieren, wenn Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit $1/4$ oder größer ist: wir nehmen an, dass sie genau $1/4$ beträgt. Wenn Sie vier Mal ablehnen, haben Sie insgesamt -4 Punkte. Wenn Sie jedes Mal annehmen und ein Spiel gewinnen, erhalten Sie ebenfalls $2(1-3) = -4$ Punkte.

8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen drei am selben Tag Geburtstag haben? Wie viele Leute braucht man mindestens, um eine Wahrscheinlichkeit von $1/2$ zu erhalten? (Wir nehmen wieder an, dass die Geburtstage gleichverteilt sind und ignorieren Schalttage und Zwillinge.)

Lösung: Mit $B := 365$ und n Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass Geburtstage unter den n Personen höchstens doppelt auftreten (der erste Summand zählt die Fälle ohne doppelte Geburtstate, wie beim ursprünglichen Problem; der zweite Summand zählt alle Verteilungen mit genau einem Doppelgeburtstag usw.):

$$P(n) = \frac{1}{B^n}\left(B^{\underline{n}} + B^{\underline{n-1}}\binom{n}{2} + B^{\underline{n-2}}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}/2 + B^{\underline{n-3}}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}/3! + \cdots\right) = \frac{1}{B^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{B^{\underline{n-k}}n^{\underline{2k}}}{2^k\cdot k!}$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $1 - P(n)$.

9. Vergleichen Sie die Minima, Maxima und Erwartungswerte der folgenden zwei Würfelspiele: Einmal wird die Summe von vier Würfeln genommen. Bei dem anderen wird das Produkt von zwei Würfeln genommen.

Lösung: Erwartungswert bei der Summe ist $4 \cdot \frac{7}{2} = 14$.
Erwartungswert beim Produkt: in der folgenden Tabelle sind alle möglichen Produkte aufgeführt, zusammen mit ihrer Anzahl (so tritt das Produkt 9 nur auf, wenn beide Würfel 3 zeigen, kommt also einmal vor; dagegen gibt es vier Varianten $2\cdot 3 = 3\cdot 2 = 1\cdot 6 = 6\cdot 1$ für das Produkt 6 — als Probe kann man testen, dass die Summe aller Anzahlen 36 ist).

Produkt:	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
Anzahl:	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4	2	1	2	2	2	1	2	1
Gewicht:	1	4	6	12	10	24	16	9	20	48	30	16	36	40	48	25	60	36

Der gesuchte Erwartungswert beim Produkt ist dann die Summe der Gewichte, geteilt durch 36:

$$E(\text{Produkt}) = \frac{1\cdot 1}{36} + \frac{2\cdot 2}{36} + \frac{3\cdot 2}{36} + \cdots + \frac{36\cdot 1}{36} = \frac{1}{36}\big(1+4+6+12+10+\cdots+25+60+36\big) = \frac{441}{36}.$$

Antwort: $E(\text{Summe}) = 14 > 12\frac{1}{4} = E(\text{Produkt})$.

10. Berechnen Sie den Erwartungswert des folgenden Zufallsexperiments: es wird ein Standardwürfel geworfen und dessen Wert genommen. Bei einer 6 wird abermals gewürfelt und das Ergebnis hinzuaddiert. Dieser Vorgang wird wiederholt, aber bei der dritten 6 nehmen Ihnen die entnervten Mitspieler den Würfel weg.
Zusatzaufgabe: Können Sie den Erwartungswert auch bestimmen, wenn Sie bei Sechsen unbegrenzt weiterwürfeln dürfen? (Hinweis: geometrische Reihe und ihre Ableitung.)

Lösung: Brechen wir bei der dritten 6 ab, dann ist der Erwartungswert die endliche Summe

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{11}{36}+\frac{13}{216}+\frac{14}{216}+\frac{15}{216}+\frac{16}{216}+\frac{17}{216}+\frac{18}{216} \\ &= \frac{15}{6}+\frac{45}{36}+\frac{93}{216} = \frac{540+270+93}{216} = \frac{903}{216} = \frac{301}{72}. \end{aligned}$$

Erlauben wir beliebig viele Sechsen, dann ist der Erwartungswert die (unendliche) Summe

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{11}{36}+\frac{13}{216}+\frac{14}{216}+\frac{15}{216}+\frac{16}{216}+\frac{17}{216}+\frac{19}{6^4}+\cdots \\
&= \frac{15}{6}+\frac{15+5\cdot 6}{36}+\frac{15+5\cdot 12}{216}+\frac{15+5\cdot 18}{6^4}+\cdots \\
&= \sum_{i\geq 1}\left(\frac{15+30(i-1)}{6^i}\right)=\frac{15}{6}\sum_{i\geq 0}\frac{1}{6^i}+\frac{30}{6}\sum_{i\geq 1}\frac{i-1}{6^{i-1}}=\frac{15}{6}\sum_{i\geq 0}\frac{1}{6^i}+\frac{30}{6}\sum_{i\geq 0}\frac{i}{6^i} \\
&= \frac{15}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}}+\frac{30}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{6})^2}=\frac{15}{6}\cdot\frac{6}{5}+\frac{30}{36}\cdot\frac{36}{25}=\frac{21}{5}.
\end{aligned}$$

Hier benutzten wir die geometrische Reihe $\sum_{i\geq 0} x^i = \frac{1}{1-x}$ und ihre mit x multiplizierte Ableitung $\sum_{i\geq 0} ix^i = x\frac{1}{(1-x)^2}$ für $x \in (-1,1)$. In der Rechnung ist $x = 1/6$.
Vergleichen wir mit dem Erwartungswert $E_0 = 7/2$ beim einfachen Wurf, dann finden wir $E_0 < E_1 < E_2$, wobei $E_0 = \frac{1260}{360}, E_1 = \frac{1505}{360}, E_3 = \frac{1512}{360}$.