Vorlesung Diskrete Mathematik I+II

David Ploog, Essen, 2013 und 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Didaktischer Ansatz

Die meisten Studierenden sind im 1. bzw. 2. Semester. Mein Plan sah deswegen für das erste Semester vor:

- Es werden Themen behandelt, die keine mathematischen Voraussetzungen haben (Kombinatorik, Graphen). Einige der behandelten Sätze sind für mich mathematisches Allgemeinwissen, die sowieso jeder Student einmal gesehen haben sollte (die Platonischen Körper, der 4- bzw. 5-Farben-Satz für planare Graphen).

- Betonung auf mathematischer Sprache/Notation und Beweisen. Insbesondere bot es sich oft an, verschiedene Beweise einer Aussage zugeben (etwa eine Formel mit Induktion, aber auch durch die kombinatorische Interpretation, zu beweisen).

In der zweiten Vorlesung bin ich anders vorgegangen:

- Auswahl des Stoffes: ich wollte diskrete Mathematik mit Kenntnissen aus Analysis I und linearer Algebra I verbinden.
  Für die Analysis habe ich daher Differenzenrechnung (das diskrete Analogon zur Infinitesimalrechnung) sowie erzeugende Funktionen (formale Potenzreihen) gewählt. Für die lineare Algebra habe ich algebraische Graphentheorie genommen: das baut einerseits auf der Graphentheorie aus diskreter Mathematik I auf und benutzt andererseits Standardmethoden der LA (Berechnung von Eigenwerten).

Einige Bemerkungen zu beiden Vorlesungen: Die Veranstaltung zählt offiziell als 1+1, d.h. Vorlesung mit integrierter Übung. Ich hatte zunächst versucht, Hausaufgaben zu geben und in der folgenden Vorlesung zu besprechen. Das hat aber schlecht funktioniert, weil die Studenten die Aufgaben kaum bearbeitet haben. Daraufhin bin ich dazu übergegangen, Aufgaben in der Vorlesung zu stellen und 5–10 Minuten Zeit zum Bearbeiten zu geben. Währenddessen bin ich durch die Reihen gegangen, um Fragen zu beantworten und Hilfestellung zu geben. Das hat sehr gut funktioniert, auch war ich dadurch immer auf dem Laufenden, wie gut die Studenten den Stoff verstanden haben.
Die Aufgaben selber habe ich manchmal vorbereitet, aber oft auch improvisert. Wenn ich ein Beispiel vorgerechnet habe (etwa eine diskrete Ableitung), dann ist es leicht, die Studenten selbst eine Ableitung berechnen zu lassen. Ich finde es auch gut, die Studenten selbst Aussagen oder Formeln finden zu lassen (darin sind sie nämlich sehr ungeübt). Beispiel: sie sollten eine Formel für die diskrete Ableitung eines Produktes finden. Ich habe versucht, in jeder Vorlesung zwei Aufgaben zu stellen.
Auch habe ich bei allen Sätzen vor dem Beweis Beispiele gebracht, bis die Studenten die Aussage verstehen konnten.

2 Literatur

[A]	M. Aigner: *Diskrete Mathematik*. Vieweg 1993.
[BH]	A.E. Brouwer, W.H. Haemers: *Spectra of Graphs*. Springer 2011.
[B]	R. Brualdi: *Introductory Combinatorics*. Prentice Hall 1992.
[GKP]	R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley 1994.
[M]	H. Minc: *Nonnegative Matrices*. Technion 1974.
[vLW]	J. van Lint, R. Wilson: *A Course in Combinatorics*. CUP 1992.

Kombinatorik: [**A**, §1], [**B**, §3,8]
Allgemeine Graphentheorie: [**A**, §5], [**B**, §11], [**vLW**, §1]
Stirling-Zahlen, Mengenbild: [**GKP**, §6.1]
Differenzenrechnung: [**A**, §2.2], [**GKP**, §2.6]
Erzeugende Funktionen: [**GKP**, §7], [**A**, §3], [**B**, §7.5]
Algebraische Graphentheorie: [**BH**, §1-3]
Google Pagerank: [**BH**, §3.13.2]

[**M**, Seite 10] gibt ein Beispiel für eine Matrix T, so dass die im Beweis von Perron-Frobenius auftretende Abbildung $f\colon \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, ||x||_1 = 1\} \to \mathbb{R}$ unstetig ist.

3 Inhalt

3.1 Kombinatorik

Fakultäten und Anordnungen

Binomialkoeffizienten und Auswahl

Zwei Beweise für die Formel $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$: Rechnung und Abzählen.
Anwendung: Pascalsches Dreieck.
Binomialkoeffizienten als Faktoren vor Binomen. Zwei Beweise für binomische Formel.
Steigende/fallende Faktorielle: $n^{\overline{k}} = n(n+1)\cdots(n+k-1), n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.
Anzahl der Möglichkeiten, k aus n Dinge mit Zurücklegen auszuwählen ist $\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}$.
(Bemerkung: $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$ zählt Auswahl ohne Zurücklegen.)

Potenzen und Tupel

Anzahl der k-Tupel von n Elementen ist n^k.

Mengen und Abbildungen

Teilweise Wiederholung von Standardbezeichnungen (Mächtigkeit, Vereinigung, Durchschnitt, disjunkt, Produkt, Potenzmenge, Menge der Abbildungen). In diesem Teil ging es darum, dass viele kombinatorische Formeln von Bijektionen geeigneter Mengen herkommen.
Beispiel: neue Beweise (mit Mengen und Abbildungen) bereits bekannter Aussagen, etwa $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ (disjunkte Zerlegung der Potenzmenge einer n-elementigen Menge in die i-elementigen Teilmengen).

Zusammenfassung und Beispiele

Hier habe ich vier wesentliche Formeln wiederholt und Alltagsbeispiele gebracht.

Anzahl der Möglichkeiten, k aus n Dingen zu wählen	mit Wiederholung (d.h. Zurücklegen)	ohne Wiederholung (d.h. ohne Zurücklegen)
mit Reihenfolge (d.h. unsortiert)	n^k	$n^{\underline{k}} = \binom{n}{k}k!$
ohne Reihenfolge (d.h. sortiert)	$\frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$	$\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k}$

Diskrete Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsverteilung (nur auf endlichen Mengen), Zufallsvariable, Erwartungswert (aber keine Varianz). Hier ging es nicht darum, eine Einführung in die Stochastik zu geben, sondern (1) zu zeigen, wie die Kombinatorik aus der bisherigen Vorlesung angewendet werden kann und (2) den Studenten den Einstieg in die Stochastik (3. Semester oder später) zu erleichtern, indem sie viele Beispiele sehen und Grundbegriffe wie den Erwartungswert schon kennengelernt haben.

Beispiele: Würfel, Pokerhände, Petersburger Paradox, Geburtstagparadox, gedächtnislose Wartezeit, Monty-Hall-Dilemma.

3.2 Graphentheorie

Definitionen und Beispiele

Definition von einfachen Graphen (ungerichtet, keine Mehrfachkanten/Schlaufen).
Alltagsbeispiele: Stammbaum, Verkehrsnetz, politische Landkarten.
Einfache mathematische Beispiele: Pfadgraph A_n, Zykelgraph Z_n, vollständiger Graph K_n.
Interessantes mathematisches Beispiel: Kippgraph (Triangulierungen des n-Eckes; s.u.).
Weitere Definitionen (immer mit Beispielen, auch durch die Studenten): Isomorphie von Graphen; Weg, Zusammenhang, Komponenten; Baum (zusammenhängender Graph ohne Zykel).
Beispiel: Klassifikation zusammenhängender Graphen mit ≤ 4 Ecken; Klassifikation von Bäumen mit ≤ 6 Ecken.
Erwähnung von Varianten: gerichtete Graphen; Multigraphen; gewichtete Graphen.
Aufgabe: bipartite Graphen = Graphen ohne Zykel ungerader Länge.
Satz: jeder zusammenhängende Graph hat einen aufspannenden Baum.

Planare Graphen und Färbungen

Definition: planarer Graph
Eulersche Polyederformel.
Korollar: G planar mit e Ecken und k Kanten $\implies$ $k \leq 3e - 6$. Sogar $k \leq 2e - 4$, falls G keine Dreiecke hat.
Beispiele: K_5 nicht planar, $K_{3,3}$ nicht planar.
Dualer Graph G^* eines planaren Graphen G (Aufgabe: zeige $G \cong G^{**}$ und finde einen Graphen G mit verschiedenen ebenen Darstellungen, so dass die dualen Graphen nicht isomorph sind.)
Definition: (Ecken-)Färbung eines Graphen; Farbzahl $\chi(G)$
5-Farben-Satz: G planar $\implies$ $\chi(G) \leq 5$.
Bemerkungen zur Geschichte des 4-Farben-Satzes.

Reguläre Graphen und die Platonischen Körper

Definition: regulärer Graph
Satz: G planarer, zusammenhängender, n-regulärer Graph mit G^* m-regulär $\implies$ $(n, m) \in \{(2, *), (*, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}$.
Definitionen: konvexe Teilmenge in $\mathbb{R}^n$; konvexe Hülle; Polyeder (=konvexe Hülle von endlich vielen Punkten).
Bemerkung: Polyeder haben planaren Kantengraphen.
Definition: Platonische Körper.
Klassifikation der Platonischen Körper: notwendige Bedingung: Kantengraph ist regulär, dualer Kantengraph ist regulär. (Damit gibt es höchstens fünf Platonische Körper.) Existenz durch Konstruktion.
Dualität der Platonischen Körper (entspricht $G \leftrightarrow G^*$).

3.3 Differenzenrechnung

Motivation

Drei Beweise für $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. (Induktion; Rechteck; kombinatorisch).

Was ist eine Formel für $\sum_{i=1}^n i^2$? (Antwort: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)$.) Wenn man die Formel hat, ist der Beweis eine einfache Induktion. Wie kommt man darauf? Ein Ansatz ist $\sum_{i=1}^n i^2 = An^3 + Bn^2 + Cn + D$ und Lösen des linearen Gleichungssystems.
Einfacher und konzeptioneller mit diskreter Integration (Differenzenrechnung).
Erinnerung: Ableitung von Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Differenzen- und Differentialquotient.

Diskrete Ableitung

Definition: Für $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sind $\Delta f, \nabla f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit $\Delta f(x) := f(x+1) - f(x)$ und $\nabla f(x) := f(x) - f(x-1)$ der *Vorwärts- bzw. Rückwärts-Differenzoperator*.
Beispiel: $\Delta(x^n) = (x+1)^n - x^n \neq nx^{n-1}$, aber Fehlerterme haben kleineren Grad.
Satz: $\Delta x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n-1}}$ und $\nabla x^{\overline{n}} = nx^{\overline{n-1}}$.
Korollar: $\Delta\binom{x}{n} = \binom{x}{n-1}$.
Bemerkung: $\Delta, \nabla\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ sind $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.
Erweiterung des Satzes auf negative Exponenten: $x^{\underline{-n}} := 1/(x+n)^{\underline{n}}$ und $x^{\overline{-n}} := 1/(x-n)^{\overline{n}}$.

Beispiel: diskretes Analogon zur Exponentialfunktion ist 2^x, denn $\Delta 2^x = 2^x$. (Beziehung zu Potenzreihen: $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ und $2^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{\underline{n}}}{n!}$.)

Diskrete Stammfunktion

Definition: $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ diskrete Stammfunktion von $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, wenn $\Delta f = g$. Schreiben dann $f = \sum g$ ("unbestimmte Summe").
Satz: $\Delta f = g \implies \sum_{i=a}^b g(i) = f(b+1) - f(a)$.
Beispiel: $\sum x^{\underline{n}} = \frac{1}{n+1} x^{\underline{n+1}}$.
Anwendung: $x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} \implies \sum_{x=1}^n x^2 = \sum_{x=0}^n x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}} = \left[\frac{1}{3}x^{\underline{3}}\right]_1^{n+1} + \left[\frac{1}{2}x^{\underline{2}}\right]_1^{n+1} = \frac{1}{3}(n+1)^{\underline{3}} + \frac{1}{2}(n+1)^{\underline{2}} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Beispiel: diskrete Stammfunktion von $x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$ ist $H_x := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$. (Diskretes Analogon des Logarithmus. Euler-Masceroni: $\lim_{n\to\infty} H_n - \ln(n) = 0{,}577\ldots$ mit Beweis.)

Satz (diskrete Leibniz-Regel): $\Delta(f \cdot g) = \Delta f \cdot Tg + f \cdot \Delta g$ mit $Tf(x) := f(x+1)$.
Korollar (diskrete partielle Summation): $F = \sum f, G = \sum g \implies \sum Fg = FG - \sum fTg$.

Stirling-Zahlen

Definition der Stirling-Zahlen 1. Art $(s_{n,k})$ und 2. Art $(S_{n,k})$ als Basiswechselkoeffizienten: $x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} x^{\underline{k}}$ und $x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n s_{n,k} x^k$

Satz: $S_{n+1,k} = k \cdot S_{n,k} + S_{n,k-1}$ und $s_{n+1,k} = -n \cdot s_{n,k} + s_{n,k-1}$.
Damit einfache Berechnung von $S_{n,k}$ und $s_{n,k}$ wie mit Pascalschem Dreieck.

Satz: $S_{n,k}$ ist die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge in k nicht-leere Teilmengen.

3.4 Erzeugende Funktionen

Vektorraum der formalen Potenzreihen $\mathbb{R}[\![x]\!]$. Ist isomorph zum Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Folgen, hat aber bessere Eigenschaften: nützlichere Ringstruktur (Konvolution von Reihen) und kompaktere Darstellung von Information).

$(a_n) = a_0, a_1, a_2 \dots$ Zahlenfolge $\implies A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ zugehörige Potenzreihe.

Wiederholung geometrische Reihe (endlich und unendliche, mit Beweis). Erste Beispiele:
$1,1,1,1,\dots \implies A(x) = \frac{1}{1-x}$; $\quad 1,-1,1,-1,\dots \implies A(x) = \frac{1}{1+x}$;
$1,0,1,0,\dots \implies A(x) = \frac{1}{1-x^2}$; $\quad 1,2,3,4,\dots \implies A(x) = (\frac{1}{1-x})^2$.

Lösen von Rekursionen

Das ist Standard, ich habe mit dem Domino-Beispiel aus Graham/Knuth/Patashnik angefangen: wie viele Möglichkeiten gibt es, ein $2\times n$-Feld mit n Dominos zu überdecken. Bezeichnet d_n diese Anzahl, so sind die ersten Glieder $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 5$. Die Folge (d_n) genügt der Rekursion $d_{n+2} = d_{n+1} + d_n$ mit Anfangswerten $d_0 = d_1 = 1$. Für die erzeugende Funktion $D(x) = \sum_{n\geq 0} d_n x^n$ ergibt das $D(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ und, mit Partialbruchzerlegung und geometrischer Reihe, $d_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right)$. Bis auf Verschiebung sind das die Fibonacci-Zahlen: $F_n = d_{n-1}$.

Beispiel (wieder Quadratsummen): $a_0 := 0$, $a_n := a_{n-1} + n^2$. Damit $A(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^4} = (x^2 + x)\sum_{n\geq 0}\binom{n+3}{3}x^n$ mit den Formeln $\sum_{n\geq 0}\binom{n+k-1}{k}x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$ und $x^k\sum_{n\geq 0}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^k}$.

Kombinatorische Identitäten

Beispiel: $b_n := \sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{2k}2^{n-k}$ bei festem k. Mit $B(x) := \sum_n b_n x^n$ wird $B(x) = \frac{1-2x}{(1-4x)(1-x)}$ und $b_n = (2\cdot 4^n + 1)/3$.

Beispiel: Catalan-Zahlen. Hier eingeführt als die Anzahl c_n der Triangulierungen eines $(n+2)$-Ecks. Damit $c_2 = 2$, $c_3 = 5$, $c_4 = 14$.
Satz (Catalan-Rekursion): $c_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i}$.
(Beweis: fixieren eine *Seite* des $(n+2)$-Eckes und betrachten die n Dreiecke, die aus dieser Seite durch Wahl einer weiteren Ecke entstehen. Jede Triangulierung enthält genau eines der Dreiecke; jedes Dreieck teilt das $(n+2)$-Eck in ein i-Eck und ein $(n-i)$-Eck. Das gibt die Rekursion.)
Erzeugende Funktion $C(x)^2 = \frac{C(x)-1}{x}$, also $C(x) = \frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x})$.
Satz: $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

3.5 Algebraische Graphentheorie

Idee: ordnen (endlichen) Graphen Matrizen zu und können dann versuchen, Graphen-Eigenschaften mit dem Spektrum der Matrix zu verbinden.

Wiederholung zu Graphen, mit Beispielen A_n, Z_n, K_n, Kantengraphen von Polyedern.

Beispiel: Kippgraphen T_n. (Ecken sind die c_n Triangulierungen des $(n+2)$-Eckes; zwei Triangulieren sind benachbart, wenn sie durch Kippen einer Diagonale auseinander hervorgehen.) $T_2 = A_2$, $T_3 = Z_5$, T_4 ist planar. T_n ist $(n-1)$-regulär.

Adjazenzmatrix

Definition der Adjazenzmatrix $A(G)$. Beispiele. Definition hat naheliegende Erweiterung für Multi- undgerichtete Graphen. (Eine einfache, ungerichtete Schleife sollte Diagonaleintrag 2 geben.)

Definition: Kette der Länge l in einem Graphen.
Satz: $A(G)^l_{ij}$ ist die Anzahl der Ketten der Länge l von i nach j. (Gilt auch allgemein.)
Korollar: $\operatorname{tr}(A(G)^3)/6$ ist die Anzahl der Dreiecke in G.

Definition: charakteristisches Polynom $p(G) := p(A(G))$.
Definition: Spektrum $\operatorname{Spek}(G) := p(G)^{-1}(0)$ (oft mit Vielfachheiten betrachtet).
Fakt: reelle, symmetrische Matrizen haben nur reelle Eigenwerte (mit Beweis). Gilt für ungerichtete Graphen.

Definitionen: Abstand von zwei Ecken, Durchmesser $\operatorname{diam}(G)$.
Satz: G ungerichtet zusammenhängend $\implies$ G hat $\geq \operatorname{diam}(G) + 1$ verschiedene Eigenwerte.

Perron-Frobenius und Anwendungen

Definition: $T \in M(n \times n, \mathbb{R})$ positiv / nicht-negativ / primitiv / irreduzibel.
Bemerkung: T positiv $\implies$ T primitiv $\implies$ T irreduzibel $\implies$ T nicht-negativ.
Lemma: T irreduzibel $\implies$ $(I_n + T)^{n-1}$ positiv.
$A \geq 0$ Matrix $\rightsquigarrow$ $G(A)$ zugehöriger gerichteter Graph.
Immer $G(A(G)) = G$, aber im Allgemeinen $A(G(A)) \neq A$.
Lemma: A irreduzibel genau dann, wenn $G(A)$ stark (=gerichtet) zusammenhängend.
Satz (PF1): $T \geq 0 \implies$ Spektralradius $\varrho(T) := \max\{|\lambda| \,:\, \lambda \in \operatorname{Spek}(T)\}$ ist Eigenwert von T und es gibt zu $\varrho(T)$ einen positiven Eigenvektor.
Satz (PF2): $0 \leq S \leq T, \sigma \in \operatorname{Spek}(S) \implies |\sigma| \leq \varrho(T)$. Weiterhin $|\sigma| = \varrho(T) \implies S = T$.
Satz (PF3): T irreduzibel $\implies$ $\varrho(T)$ hat Vielfachheit 1.
Satz (PF4): $T \geq 0$ irreduzibel, $Tx = \lambda x$ mit $x \geq 0, x \neq 0 \implies \lambda = \varrho(T)$.

Anwendung: G (eventuell gerichteter) Graph $\implies$ existiert maximaler reeller Eigenwert $\varrho(T)$; die Vielfachheit ist 1, falls G stark zusammenhängend. Für einen Untergraphen $G' \subseteq G$ gilt $\varrho(G') \leq \varrho(G)$ mit Ungleichheit, falls G stark zusammenhängend.

Satz: Die einzigen zusammenhängenden (ungerichteten) Graphen mit Spektralradius 2 sind die $\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}$-Graphen. Die einzigen zusammenhängenden (ungerichteten) Graphen mit Spektralradius < 2 sind die ADE-Graphen.

Anwendung und Beispiel: Google Pagerank.

4 Aufgaben Diskrete Mathematik I

1. Bestimmen Sie die Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Wie viele „Wörter" kann man aus `MISSISSIPPI` bilden?

3. Wir benutzen ein Kartenspiel mit kn Karten in k Farben und n Werten; dabei $n \geq 5$ und $k \geq 2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, beim Ziehen von fünf zufälligen Karten eine der folgenden Kombinationen zu erhalten:
(a) Vierling; (b) Full House; (c) Drilling; (d) Doppelpärchen; (e) Pärchen; (f) Straße;
(g) Flush, also alle Karten von gleicher Farbe; (h) Royal Flush, also einfarbige Straße.
Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen für $k = 4$, $n = 13$ aus der Vorlesung.

4. Was ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von vier Würfeln als Produkt 36 zu erhalten?

5. Beim 6-aus-49 Spiel eines Lotto-Unternehmens gibt es eine Million Euro für den richtigen Tipp. Um Kunden zu halten, bietet ein privates Spielcasino eine Million Euro denjenigen, die das folgende Spiel gewinnen — welches Spiel sollte ein Glücksritter bevorzugen?
In einer Urne sind 24 graue Kugeln sowie fünf bunte Kugeln mit den Buchstaben B, G, I, N, O. Man zieht fünf Mal und gewinnt, wenn man die Buchstabenkugeln in der richtigen Reihenfolge (BINGO) findet.

6. Drei eingefleischte Glücksspielerinnen treffen sich, um um einen größeren Betrag zu spielen. Jede spielt nach eigenen Regeln. Berechnen Sie, wessen Spiel die größte bzw. kleinste Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

a) Anna bringt einen Beutel mit, der die Buchstaben A,A,A,N,N enthält. Sie gewinnt, wenn sie beim Ziehen von vier Buchstaben ihren Namen auslegt.
b) Berta bringt ein Standardkartenspiel mit (52 Karten) und gewinnt, wenn sie drei Karten zieht und wenigstens ein rotes As (Karo-As oder Herz-As) findet.
c) Carola würfelt mit vier Würfeln und gewinnt, wenn die Summe der Augenzahlen genau 13 ist.

7. Beim Backgammon kann der Spieler am Zug seinem Gegner anbieten, das Spiel zu *verdoppeln*. Lehnt der Gegner ab, so hat er das Spiel (zum einfachen Wert) verloren; nimmt er an, wird um den zweifachen Einsatz weitergespielt.
Wenn Ihnen die Verdopplung angeboten wird, wie reagieren Sie? Die Antwort sollte natürlich von der Wahrscheinlichkeit abhängen, dass Sie das Spiel in der aktuellen Position gewinnen. (Diese Wahrscheinlichkeit ist selbstverständlich nie genau bekannt, aber gute Backgammon-Spieler können sie recht präzise abschätzen.)

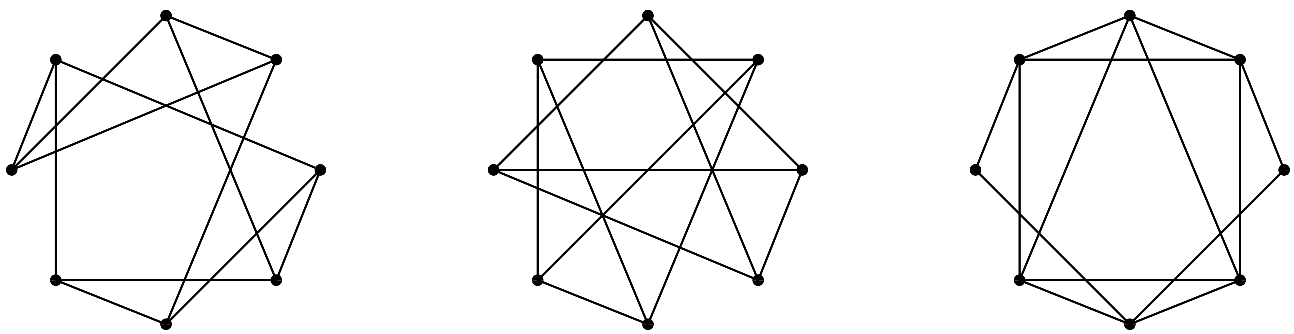
8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen drei am selben Tag Geburtstag haben? Wie viele Leute braucht man mindestens, um eine Wahrscheinlichkeit von $1/2$ zu erhalten? (Wir nehmen wieder an, dass die Geburtstage gleichverteilt sind und ignorieren Schalttage und Zwillinge.)

9. Vergleichen Sie die Minima, Maxima und Erwartungswerte der folgenden zwei Würfelspiele: Einmal wird die Summe von vier Würfeln genommen. Bei dem anderen wird das Produkt von zwei Würfeln genommen.

10. Berechnen Sie den Erwartungswert des folgenden Zufallsexperiments: es wird ein Standardwürfel geworfen und dessen Wert genommen. Bei einer 6 wird abermals gewürfelt und das Ergebnis hinzuaddiert. Dieser Vorgang wird wiederholt, aber bei der dritten 6 nehmen Ihnen die entnervten Mitspieler den Würfel weg.
Zusatzaufgabe: Können Sie den Erwartungswert auch bestimmen, wenn Sie bei Sechsen unbegrenzt weiterwürfeln dürfen? (Hinweis: geometrische Reihe und ihre Ableitung.)

Aufgaben Diskrete Mathematik I — Graphentheorie

11. Geben Sie für jeden der drei Graphen an, ob er zusammenhängend, bipartit, trivalent, planar und/oder Eulersch ist. Bestimmen Sie die Farbzahl. Geben Sie für jeden planaren Graphen einen dualen Graphen an. Zeichnen Sie für jeden Graphen einen aufspannenden Baum ein.



G_1 G_2 G_3

12. Zeichnen Sie alle Graphen mit 5 Ecken, die ausschließlich Eckengrade 2 und 3 haben (bis auf Isomorphie).

13. Geben Sie die Eulersche Polyeder-Formel an und beweisen Sie sie.

14. Beschreiben Sie die Platonischen Körper.

5 Aufgaben Diskrete Mathematik II

Differenzenrechnung

1. Bestimmen Sie eine Formel für die Summe $\sum_{i=1}^{n} i^5$.

2. Ermitteln Sie die diskreten Ableitungen von $f(n) = (-1)^n$, $g(n) = |n|$ und $h(n) = 4^n$.

3. Berechnen Sie eine diskrete Stammfunktion von $2^x \cdot x^2$. Benutzen Sie partielle Summation: $F = \sum f, G = \sum g \Rightarrow \sum Fg = FG - \sum f \cdot TG$, wobei $TG(n) = G(n+1)$.

4. Wie viele Partitionen einer 8-elementigen Menge in drei (nicht-leere) Teilmengen gibt es?

Erzeugende Funktionen

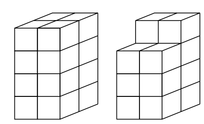
5. Geben Sie die Reihenentwicklungen der folgenden Funktionen an:

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad e^x, \quad (1+x)^k, \quad \sqrt{1+x}.$$

6. Finden Sie eine Formel für die Terme der durch die Rekursion $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ mit $a_0 = 3$ und $a_1 = 5$ gegebenen Folge.

7. Stellen Sie die erzeugende Funktion der durch die Rekursion $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} + \ldots + nb_0$ mit $b_0 = 1$ gegebenen Folge in geschlossener Form dar.

8. Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, einen Turm aus $2 \times 2 \times n$ Einheitsquadern mit $2n$ Bausteinen des Formats $1 \times 1 \times 2$ zu bauen. Betrachten Sie dafür parallel die gleiche Aufgabe mit einem solchen Turm, in dessen oberster Schicht ein $2 \times 1 \times 1$-Stein fehlt.



9. Es sei c_n die Anzahl aller Wörter der Länge $2n$ mit genau n Buchstaben X und und n Buchstaben Y, wobei jedes Anfangsstück des Wortes mindestens genauso viele X wie Y enthalte. (Jedes solche Wort beginnt also mit X und endet mit Y. Zulässige Wörter sind XY, $XYXY$, $XXYY$, nicht aber XX, $XYYX$.) Bestimmen Sie die Folge (c_n).

Algebraische Graphentheorie

10. Berechnen Sie die Spektren des vollständigen Graphen K_4, des Pfadgraphen $P_4 = A_4$ und des Zykelgraphen $Z_4 = \tilde{A}_3$.

11. Es sei G ein bipartiter Graph. Zeigen Sie, dass das Spektrum von G symmetrisch ist: $\lambda \in \operatorname{Spek}(G) \implies -\lambda \in \operatorname{Spek}(G)$ (auch mit Vielfachheiten).

12. Es sei G ein k-regulärer Graph. Zeigen Sie, dass k ein Eigenwert von G ist und das Spektrum absolut beschränkt: $\lambda \in \operatorname{Spek}(G) \implies |\lambda| \leq k$.

13. Finden Sie eine Formel für das charakteristische Polynom eines unzusammenhängenden Graphen $G = G_1 + G_2$ (drücken Sie also p_G durch p_{G_1} und p_{G_2} aus, wobei G_1 und G_2 disjunkte Untergraphen von G sind).

14. Zeigen Sie, dass der bipartite Graph $K_{1,4} = \tilde{D}_4$ und der unzusammenhängende Graph $P_1 + Z_4$ isospektral sind, also das gleiche Spektrum haben (mit Vielfachheiten).

6 Lösungen zu den Aufgaben Diskrete Mathematik I

1. Bestimmen Sie die Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.
Lösung: $n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$, insbesondere $n!$ für $k = n$ und 0 für $k > n$.

2. Wie viele „Wörter“ kann man aus `MISSISSIPPI` bilden?
Lösung: $11!/4!4!2! = 34650$.

3. Wir benutzen ein Kartenspiel mit kn Karten in k Farben und n Werten; dabei $n \geq 5$ und $k \geq 2$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, beim Ziehen von fünf zufälligen Karten eine der folgenden Kombinationen zu erhalten:
(a) Vierling; (b) Full House; (c) Drilling; (d) Doppelpärchen; (e) Pärchen; (f) Straße;
(g) Flush, also alle Karten von gleicher Farbe; (h) Royal Flush, also einfarbige Straße.
Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen für $k = 4$, $n = 13$ aus der Vorlesung.

4. Was ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von vier Würfeln als Produkt 36 zu erhalten?
Lösung: 2,7%.

5. Beim 6-aus-49 Spiel eines Lotto-Unternehmens gibt es eine Million Euro für den richtigen Tipp. Um Kunden zu halten, bietet ein privates Spielcasino eine Million Euro denjenigen, die das folgende Spiel gewinnen — welches Spiel sollte ein Glücksritter bevorzugen?
In einer Urne sind 24 graue Kugeln sowie fünf bunte Kugeln mit den Buchstaben B, G, I, N, O. Man zieht fünf Mal und gewinnt, wenn man die Buchstabenkugeln in der richtigen Reihenfolge (BINGO) findet.
Lösung: $P(\text{Lotto}) = 1/\binom{49}{6} = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44} < P(\text{Bingo}) = \frac{1}{29}\cdot\frac{1}{28}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{26}\cdot\frac{1}{25}$.

6. Drei eingefleischte Glücksspielerinnen treffen sich, um um einen größeren Betrag zu spielen. Jede spielt nach eigenen Regeln. Berechnen Sie, wessen Spiel die größte bzw. kleinste Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

a) Anna bringt einen Beutel mit, der die Buchstaben A,A,A,N,N enthält. Sie gewinnt, wenn sie beim Ziehen von vier Buchstaben ihren Namen auslegt.
b) Berta bringt ein Standardkartenspiel mit (52 Karten) und gewinnt, wenn sie drei Karten zieht und wenigstens ein rotes As (Karo-As oder Herz-As) findet.
c) Carola würfelt mit vier Würfeln und gewinnt, wenn die Summe der Augenzahlen genau 13 ist.

Lösung: a) Es gibt $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ Möglichkeiten, vier Buchstaben aus dem Sack zu ziehen (keine Anordnung, ohne Zurücklegen). Davon sind günstig: $3\cdot 2\cdot 1\cdot 2$ (für das erste A gibt es drei Chancen, für das erste N zwei usw.) Die Wahrscheinlichkeit P_A ist also $12/120 = 1/10$.
Alternativ: $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} = 6/60 = 1/10$.

b) Es gibt $\binom{52}{3}$ Weisen, drei Karten zu ziehen. Davon haben $\binom{2}{1}\cdot\binom{50}{2}$ genau ein rotes As und $\binom{2}{2}\cdot 50$ beide roten Asse. Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit also $P_B = (2\cdot 50\cdot 49/2 + 50)/(52\cdot 51\cdot 50/6) = 25/221$.
Alternativ: Unter den $\binom{52}{3}$ Tripeln gibt es $\binom{50}{2}$, die keines der beide roten Asse enthalten. Die Wahrscheinlichkeit P_B ist also

$$1 - \binom{50}{3}\Big/\binom{52}{3} = 1 - \frac{50\cdot 49\cdot 48}{52\cdot 51\cdot 50} = 1 - \frac{49\cdot 4}{17\cdot 13} = \frac{221-196}{221} = \frac{25}{221}.$$

c) 6^4 mögliche Ergebnisse insgesamt, unter Berücksichtigung der Reihenfolge.
Liste aller Möglichkeiten, 13 als Summe zu erhalten (ohne Reihenfolge): 6511, 6421, 6331, 6322, 5521, 5431, 5422, 5332, 4441, 4432, 4333. Anzahl der Möglichkeiten, 13 zu erhalten (mit Reihenfolge) — $4! = 24$ Permutationen, falls alle vier Zahlen verschieden sind; $12 = 4!/2!$ bei einem Paar und $4 = 4!/4!$ bei einem Dreier:

$$24\cdot 2 + 12\cdot 7 + 4\cdot 2 = 48 + 96 + 8 = 140,$$

die Wahrscheinlichkeit ist also $140/6^4 = 35/9 \cdot 36$.

Mit $P_A = \frac{1}{10}$, $P_B = \frac{25}{221}$ und $P_C = \frac{35}{9\cdot 36}$ ist $P_A < P_B$ (wegen $221 < 10 \cdot 25 = 250$), $P_B > P_C$ (wegen $25 \cdot 9 \cdot 36 = 8100 > 7735 = 221 \cdot 35$) und $P_A < P_C$ (wegen $9 \cdot 36 = 324 < 350 = 10 \cdot 35$).

7. Beim Backgammon kann der Spieler am Zug seinem Gegner anbieten, das Spiel zu *verdoppeln.* Lehnt der Gegner ab, so hat er das Spiel (zum einfachen Wert) verloren; nimmt er an, wird um den zweifachen Einsatz weitergespielt.
Wenn Ihnen die Verdopplung angeboten wird, wie reagieren Sie? Die Antwort sollte natürlich von der Wahrscheinlichkeit abhängen, dass Sie das Spiel in der aktuellen Position gewinnen. (Diese Wahrscheinlichkeit ist selbstverständlich nie genau bekannt, aber gute Backgammon-Spieler können sie recht präzise abschätzen.)
Lösung: Sie sollten die Verdopplung akzeptieren, wenn Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit $1/4$ oder größer ist: wir nehmen an, dass sie genau $1/4$ beträgt. Wenn Sie vier Mal ablehnen, haben Sie insgesamt -4 Punkte. Wenn Sie jedes Mal annehmen und ein Spiel gewinnen, erhalten Sie ebenfalls $2(1-3) = -4$ Punkte.

8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen drei am selben Tag Geburtstag haben? Wie viele Leute braucht man mindestens, um eine Wahrscheinlichkeit von $1/2$ zu erhalten? (Wir nehmen wieder an, dass die Geburtstage gleichverteilt sind und ignorieren Schalttage und Zwillinge.)
Lösung: Mit $B := 365$ und n Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass Geburtstage unter den n Personen höchstens doppelt auftreten (der erste Summand zählt die Fälle ohne doppelte Geburtstage, wie beim ursprünglichen Problem; der zweite Summand zählt alle Verteilungen mit genau einem Doppelgeburtstag usw.):

$$P(n) = \frac{1}{B^n}\left(B^{\underline{n}} + B^{\underline{n-1}}\binom{n}{2} + B^{\underline{n-2}}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}/2 + B^{\underline{n-3}}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}/3! + \cdots\right) = \frac{1}{B^n}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{B^{\underline{n-k}} n^{\underline{2k}}}{2^k \cdot k!}.$$

9. Vergleichen Sie die Minima, Maxima und Erwartungswerte der folgenden zwei Würfelspiele: Einmal wird die Summe von vier Würfeln genommen. Bei dem anderen wird das Produkt von zwei Würfeln genommen.

Lösung: Erwartungswert bei der Summe ist $4 \cdot \frac{7}{2} = 14$.
Erwartungswert beim Produkt: in der folgenden Tabelle sind alle möglichen Produkte aufgeführt, zusammen mit ihrer Anzahl (so tritt das Produkt 9 nur auf, wenn beide Würfel 3 zeigen, kommt also einmal vor; dagegen gibt es vier Varianten $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 1 \cdot 6 = 6 \cdot 1$ für das Produkt 6 — als Probe kann man testen, dass die Summe aller Anzahlen 36 ist).

Produkt:	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
Anzahl:	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4	2	1	2	2	2	1	2	1
Gewicht:	1	4	6	12	10	24	16	9	20	48	30	16	36	40	48	25	60	36

Der gesuchte Erwartungswert beim Produkt ist dann die Summe der Gewichte, geteilt durch 36:

$$E(\text{Produkt}) = \frac{1\cdot 1}{36} + \frac{2\cdot 2}{36} + \frac{3\cdot 2}{36} + \cdots + \frac{36\cdot 1}{36} = \frac{1}{36}\big(1+4+6+12+10+\cdots+25+60+36\big) = \frac{441}{36}.$$

Antwort: $E(\text{Summe}) = 14 > 12\frac{1}{4} = E(\text{Produkt})$.

10. Berechnen Sie den Erwartungswert des folgenden Zufallsexperiments: es wird ein Standardwürfel geworfen und dessen Wert genommen. Bei einer 6 wird abermals gewürfelt und das Ergebnis hinzuaddiert. Dieser Vorgang wird wiederholt, aber bei der dritten 6 nehmen Ihnen die entnervten Mitspieler den Würfel weg.
Zusatzaufgabe: Können Sie den Erwartungswert auch bestimmen, wenn Sie bei Sechsen unbegrenzt weiterwürfeln dürfen? (Hinweis: geometrische Reihe und ihre Ableitung.)

Lösung: Brechen wir bei der dritten 6 ab, dann ist der Erwartungswert die endliche Summe

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{7}{36} + \frac{8}{36} + \frac{9}{36} + \frac{10}{36} + \frac{11}{36} + \frac{13}{216} + \frac{14}{216} + \frac{15}{216} + \frac{16}{216} + \frac{17}{216} + \frac{18}{216} \\ &= \frac{15}{6} + \frac{45}{36} + \frac{93}{216} = \frac{540 + 270 + 93}{216} = \frac{903}{216} = \frac{301}{72}. \end{aligned}$$

Erlauben wir beliebig viele Sechsen, dann ist der Erwartungswert die (unendliche) Summe

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{7}{36} + \frac{8}{36} + \frac{9}{36} + \frac{10}{36} + \frac{11}{36} + \frac{13}{216} + \frac{14}{216} + \frac{15}{216} + \frac{16}{216} + \frac{17}{216} + \frac{19}{6^4} + \cdots \\ &= \frac{15}{6} + \frac{15 + 5 \cdot 6}{36} + \frac{15 + 5 \cdot 12}{216} + \frac{15 + 5 \cdot 18}{6^4} + \cdots \\ &= \sum_{i \geq 1} \left(\frac{15 + 30(i-1)}{6^i} \right) = \frac{15}{6} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{6^i} + \frac{30}{6} \sum_{i \geq 1} \frac{i-1}{6^{i-1}} = \frac{15}{6} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{6^i} + \frac{30}{6} \sum_{i \geq 0} \frac{i}{6^i} \\ &= \frac{15}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} + \frac{30}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{6})^2} = \frac{15}{6} \cdot \frac{6}{5} + \frac{30}{36} \cdot \frac{36}{25} = \frac{21}{5}. \end{aligned}$$

Hier benutzten wir die geometrische Reihe $\sum_{i \geq 0} x^i = \frac{1}{1-x}$ und ihre mit x multiplizierte Ableitung $\sum_{i \geq 0} i x^i = x \frac{1}{(1-x)^2}$ für $x \in (-1, 1)$. In der Rechnung ist $x = 1/6$.
Vergleichen wir mit dem Erwartungswert $E_0 = 7/2$ beim einfachen Wurf, dann finden wir $E_0 < E_1 < E_2$, wobei $E_0 = \frac{1260}{360}, E_1 = \frac{1505}{360}, E_2 = \frac{1512}{360}$.

7 Lösungen zu den Aufgaben Diskrete Mathematik II

1. Bestimmen Sie eine Formel für die Summe $\sum_{i=1}^{n} i^5$.
Lösung: Zunächst muss x^5 als Linearkombination der fallenden Potenzen $1 = x^{\underline{0}}, x = x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, x^{\underline{3}}, x^{\underline{4}}, x^{\underline{5}}$ dargestellt werden. Das geht von Hand oder, einfacher, mit den Stirling-Zahlen:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}.$$

Damit ist für $n = 5$

$$\begin{aligned} x^5 &= S_{5,0} + S_{5,1}x + S_{5,2}x^{\underline{2}} + S_{5,2}x^{\underline{3}} + S_{5,2}x^{\underline{4}} + S_{5,2}x^{\underline{5}} \\ &= x + 15x^{\underline{2}} + 25x^{\underline{3}} + 10x^{\underline{4}} + x^{\underline{5}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{n} x^5 &= \sum_{x=1}^{n} x + 15x^{\underline{2}} + 25x^{\underline{3}} + 10S_{5,2}x^{\underline{4}} + x^{\underline{5}} \\ &= \left[\frac{1}{2}x^{\underline{2}} + \frac{15}{3}x^{\underline{3}} + \frac{25}{4}x^{\underline{4}} + \frac{10}{5}x^{\underline{5}} + \frac{1}{6}x^{\underline{6}}\right]_1^{n+1} \\ &= \frac{1}{12}\Big(2(n+1)^{\underline{6}} + 25(n+1)^{\underline{5}} + 75(n+1)^{\underline{4}} + 60(n+1)^{\underline{3}} + 6(n+1)^{\underline{2}}\Big) \end{aligned}$$

2. Ermitteln Sie die diskreten Ableitungen von $f(n) = (-1)^n$, $g(n) = |n|$ und $h(n) = 4^n$.
Lösung: $\Delta f(n) = -2(-1)^n = -2f(n)$, $\qquad \Delta g(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ -1, & n < 1 \end{cases}$, $\qquad \Delta h(n) = 3 \cdot 4^n$.

3. Berechnen Sie eine diskrete Stammfunktion von $2^x \cdot x^2$. Benutzen Sie partielle Summation: $F = \sum f, G = \sum g \Rightarrow \sum Fg = FG - \sum f \cdot TG$, wobei $TG(n) = G(n+1)$.
Lösung: Es ist $\sum 2^x \cdot x = 2^x \cdot x - \sum 2^{x+1} = 2^x(x-2)$. Das gibt, zusammen mit $\Delta x^2 = 2x + 1$

$$\begin{aligned} \sum 2^x \cdot x^2 &= 2^x \cdot x^2 - \sum (2x+1)2^{x+1} = 2^x \cdot x^2 - \sum (4x+2)2^x \\ &= 2^x \cdot x^2 - 2 \cdot 2^x - 4\sum 2^x \cdot x \\ &= 2^x \cdot (x^2 - 2) - 4 \cdot 2^x(x-2) \\ &= 2^x \cdot (x^2 - 4x + 6). \end{aligned}$$

Machen Sie die Probe!

4. Wie viele Partitionen einer 8-elementigen Menge in drei (nicht-leere) Teilmengen gibt es?
Lösung: Gesucht ist die Stirling-Zahl $S_{8,3}$. Wir berechnen sie mit der Rekursionsformel $S_{n+1,k} = k \cdot S_{n,k} + S_{n,k-1}$:

	$k = 1$	2	3	4	
$n = 1$	1				
2	1	1			
3	1	3	1		
4	1	7	6	1	
5	1	15	25	10	1
6	1	31	90	…	
7	1	63	301	…	
8	1	127	**966**	…	

5. Geben Sie die Reihenentwicklungen der folgenden Funktionen an:

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad e^x, \quad (1+x)^k, \quad \sqrt{1+x}.$$

Lösung:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \qquad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n\geq 0} x^{2n}, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n,$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n, \qquad (1+x)^k = \sum_{n\geq 0} \binom{k}{n} x^n, \qquad \sqrt{1+x} = \sum_{n\geq 0} \frac{(1/2)^{\underline{n}}}{n!} x^n.$$

6. Finden Sie eine Formel für die Terme der durch die Rekursion $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ mit $a_0 = 3$ und $a_1 = 5$ gegebenen Folge.
Lösung: Mit $A(x) := \sum_n a_n x^n$ ist durch Rekursion $\frac{1}{x^2}(A(x) - 5x - 3) = \frac{2}{x}(A(x) - 3) + 3A(x)$ und dann

$$A(x) = \frac{x-3}{3x^2+2x-1} = \frac{x-3}{(3x-1)(x+1)} = \frac{2}{1-3x} + \frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} 2\cdot 3^n x^n + (-1)^n x^n$$

und demnach $a_n = (-1)^n + 2\cdot 3^n$.

7. Stellen Sie die erzeugende Funktion der durch die Rekursion $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2} + \ldots + nb_0$ mit $b_0 = 1$ gegebenen Folge in geschlossener Form dar.
Lösung: Die zur Folge (b_n) gehörende erzeugende Funktion ist

$$B(x) := \sum_{n\geq 0} b_n x^n = 1 + x + 3x^2 + 8x^3 + \cdots$$

Wir benutzen die Rekursionsformel:

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{i=0}^{n} (n-i) b_i \Big) x^n.$$

Die Koeffizienten entstehen also durch Konvolution der Folge (B_n) mit der Folge $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Die erzeugende Funktion dieser Folge ist $x/(1-x)^2$. Die Funktionen $B(x)$ und $x/(1-x)^2 \cdot B(x)$ stimmen in allen Graden üeberein, bis auf den konstanten Term, der für $B(x)$ gleich 1 ist; bei dem Produkt aber 0. Wir erhalten

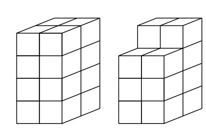
$$B(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \cdot B(x) + 1$$

und durch Umstellen

$$B(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{(1-x)^2}} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 - x} = \frac{(1-x)^2}{1-3x+x^2}$$

Bemerkung: Es ist b_n die $2n$-te Fibonacci-Zahl, was auch mit den erzeugenden Funktionen $B(x)$ und $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ gezeigt werden kann.

8. Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, einen Turm aus $2\times 2\times n$ Einheitsquadern mit $2n$ Bausteinen des Formats $1\times 1\times 2$ zu bauen. Betrachten Sie dafür parallel die gleiche Aufgabe mit einem solchen Turm, in dessen oberster Schicht ein $2\times 1\times 1$-Stein fehlt.



Lösung: Doppelrekursion mit $a_n = 2a_{n-1} + 4b_{n-1} + a_{n-2} + \delta_{n,0}$ (für den $2\times 2\times n$-Turm) und $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ (wenn ein Stein fehlt). Damit für die erzeugenden Funktionen $A = 2zA + 4zB + z^2A + 1$ und $B = zA + zB$; insgesamt $A(z) = \frac{1-z}{(1+z)(1-4z+z^2)}$.
Graham/Knuth/Patashnik: Exercise 7.23.

9. Es sei c_n die Anzahl aller Wörter der Länge $2n$ mit genau n Buchstaben X und und n Buchstaben Y, wobei jedes Anfangsstück des Wortes mindestens genauso viele X wie Y enthalte. (Jedes solche Wort beginnt also mit X und endet mit Y. Zulässige Wörter sind XY, $XYXY$, $XXYY$, nicht aber XX, $XYYX$.) Bestimmen Sie die Folge (c_n).
Lösung: c_n ist die n-te Catalan-Zahl. Sie sollten das Bestimmung von c_1, c_2, c_3, c_4 herausfinden und dann zeigen, dass c_n derselben Rekursionsformel genügt wie die Catalan-Zahlen: $c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \ldots + c_nc_0$.

10. Berechnen Sie die Spektren des vollständigen Graphen K_4, des Pfadgraphen $P_4 = A_4$ und des Zykelgraphen $Z_4 = \tilde{A}_3$.

Lösung: $\mathrm{Spek}(K_4) = \{-1, -1, -1, 3\}$, $\mathrm{Spek}(Z_4) = \{-2, -0, -0, 2\}$, $\mathrm{Spek}(P_4) = \{\pm\frac{1}{2}(\pm 1 + \sqrt{5})\}$.

Für Z_4 kann man ohne Rechnung folgendermaßen argumentieren: 0 ist Eigenwert, weil $A(Z_4)$ nicht vollen Rang hat; 2 ist Eigenwert, weil der Graph 2-regulär ist (Aufgabe 12); -2 ist Eigenwert, weil Z_4 bipartit ist, also symmetrisches Spektrum hat (Aufgabe 11); die Summe aller Eigenwerte ist 0.
Zu P_4: das charakteristische Polynom ist $t^4 - 3t^2 + 1$, also biquadratisch (keine Terme ungeraden Grades) und kann daher mit zweifacher quadratischer Ergänzung faktorisiert werden: $(t^2 - 3/2)^2 = 5/4$ und damit $t = \pm\sqrt{3/2 \pm \sqrt{5}/2}$.
Eine einfache, aber nicht notwendige Rechnung, zeigt $\sqrt{3/2 + \sqrt{5}/2} = (1 + \sqrt{5})/2$ usw.

11. Es sei G ein bipartiter Graph. Zeigen Sie, dass das Spektrum von G symmetrisch ist: $\lambda \in \mathrm{Spek}(G) \implies -\lambda \in \mathrm{Spek}(G)$ (auch mit Vielfachheiten).

Lösung: G bipartit bedeutet, dass es eine diskjunkte Zerlegung der Eckenmenge $E(G) = E_1 \cup E_2$ gibt, wobei alle Kanten von E_1 nach E_2 gehen. Wir nummerieren die Ecken von G, indem erst E_1 und dann E_2 auftritt. Damit hat die Adjazenzmatrix die Blockform

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K^t & 0 \end{pmatrix},$$

wobei K eine (nicht notwendigerweise quadratische) Matrix ist. Wir schreiben Vektoren ebenfalls in Blockform: $v = \binom{v'}{v''}$. Die Eigenwertgleichung $A(G)v = \lambda v$ bedeutet $Kv'' = \lambda v'$ und $K^t v' = \lambda v''$. Der in einer Komponente veränderte Vektor $\binom{-v'}{v''}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$, denn $\begin{pmatrix} 0 & K \\ K^t & 0 \end{pmatrix}\binom{-v'}{v''} = \binom{\lambda v'}{-\lambda v''} = -\lambda\binom{-v'}{v''}$.

12. Es sei G ein k-regulärer Graph. Zeigen Sie, dass k ein Eigenwert von G ist und das Spektrum absolut beschränkt: $\lambda \in \mathrm{Spek}(G) \implies |\lambda| \leq k$.

Lösung: Es sei $v = (1, \ldots, 1)^T$ der Vektor mit allen Einträgen 1. Dann ist $Av = kv$, denn mit G k-regulär sind alle Zeilensummen gleich k. Nun ist v ein positiver Eigenvektor, also der Perron-Frobenius-Eigenvektor und somit ist der zugehörige Eigenwert k der maximale reelle (Perron-Frobenius-)Eigenwert $\lambda_0(G)$, d.h. $|\lambda| \leq \lambda_0(G) = k$ für jeden weiteren Eigenwert λ von G.

13. Finden Sie eine Formel für das charakteristische Polynom eines unzusammenhängenden Graphen $G = G_1 + G_2$ (drücken Sie also p_G durch p_{G_1} und p_{G_2} aus, wobei G_1 und G_2 disjunkte Untergraphen von G sind).

Lösung: $p_G = p_{G_1} \cdot p_{G_2}$.
Hier hat die Adjazenzmatrix Blockform $A(G) = \begin{pmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{pmatrix}$.

14. Zeigen Sie, dass der bipartite Graph $K_{1,4} = \tilde{D}_4$ und der unzusammenhängende Graph $P_1 + Z_4$ isospektral sind, also das gleiche Spektrum haben (mit Vielfachheiten).

Lösung: $\mathrm{Spek}(K_{1,4}) = \{-2, 0, 0, 0, 2\}$. Man kann die Rechnung durch das folgende Argument vermeiden: $A(K_{1,4})$ hat Rang 2, so dass 0 ein dreifacher Eigenwert ist. Außerdem ist wegen $K_{1,4} = \tilde{D}_4$ der maximale reelle Eigenwert gleich 2, und schließlich ist auch -2 ein Eigenwert, weil die Spur von $A(K_{1,4})$ gleich 0 ist.
Das Spektrum von $P_1 + Z_4$ kann ebenfalls durch Ausrechnen bestimmt werden, es geht aber auch ohne: $\mathrm{Spek}(Z_4) = \{-2, 0, 0, 2\}$, da 2-regulär ist (also maximaler Eigenwert gleich 2) und bipartit (also auch -2 Eigenwert); außerdem hat $A(Z_4)$ nur Rang 2, also ist 0 doppelter Eigenwert. Mit Aufgabe 12 ist dann $\mathrm{Spek}(P_1 + Z_4) = \{-2, 0, 0, 0, 2\}$.

8 Klausur Diskrete Mathematik I

Aufgabe 1. (*4 Punkte*) Bei einer Tanzveranstaltung treffen sich sechs Damen und sechs Herren. Zu Beginn werden die Gläser erhoben und jede Person stößt mit jeder der elf anderen an. Danach bilden die Teilnehmer Paare (Dame/Herr) und der Tanz beginnt.

Wie oft erklingen die Gläser?

Auf wie viele Weisen kann man sechs Paare bilden?

Lösung: Jede Personen stößt mit den elf anderen an, es klingt also $12 \cdot 11/2 = \binom{12}{2} = 66$ mal.
Wenn wir die Damen mit $1, 2, \ldots, 6$ durchnummerieren, dann ist eine Partnerwahl genau eine Permutation der sechs Herren. Dafür gibt es $6! = 720$ Möglichkeiten.

Aufgabe 2. (*4 Punkte*) Kreuzen Sie an, ob Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Flächen für die folgenden Werte existieren:

$e = 5,\ k = 6,\ f = 3$	ja **nein**	$e = 6,\ k = 9,\ f = 5$	**ja** nein
$e = 6,\ k = 10,\ f = 6$	**ja** nein	$e = 8,\ k = 9,\ f = 7$	ja **nein**

Lösung: $e = 5,\ k = 6,\ f = 3$: Nein, denn es gibt kein Polyeder mit nur drei Flächen.
$e = 6,\ k = 10,\ f = 6$: Ja, die Pyramide über einem Fünfeck.
$e = 6,\ k = 9,\ f = 5$: Ja, das Dreikantprisma.
$e = 8,\ k = 9,\ f = 7$: Nein, denn die Polyederformel ist verletzt: $e + f - k = 6 \neq 2$.

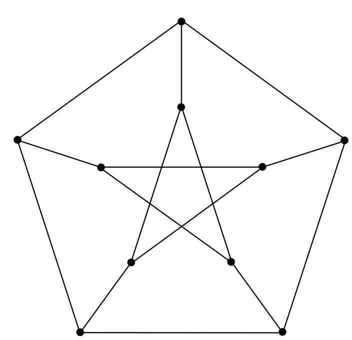
Aufgabe 3. (*4 Punkte*) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Implikationen für einen endlichen Graphen G zutreffen:

G Baum $\Longrightarrow$ G bipartit	**ja** nein	$\chi(G) = 2 \Longrightarrow G$ planar	ja **nein**
G 2-regulär $\Longrightarrow$ G bipartit	ja **nein**	G planar $\Longrightarrow \chi(G) \leq 6$	**ja** nein

Lösung: Bipartite Graphen haben keine ungeraden Zykel, Bäume haben gar keine Zykel.
$K_{3,3}$ ist bipartit (hat also $\chi(K_{3,3}) = 2$), aber nicht planar.
$Z_3 = K_3$ ist 2-regulär, aber nicht bipartit.
Farbensatz: G planar $\Rightarrow \chi(G) \leq 5$ (sogar $\chi(G) \leq 4$), insbesondere also $\chi(G) \leq 6$.

Aufgabe 4. (*4 Punkte*) Der nebenstehende Graph P heißt *Petersen-Graph*. Beantworten Sie die folgenden Fragen zum Petersen-Graphen:

Ist P bipartit?	ja **nein**
Ist P regulär?	**ja** nein
Ist P planar?	ja **nein**
Was ist die Farbzahl $\chi(P)$ von P?	



Lösung: P ist nicht bipartit, denn P enthält ungerade Zykel. P ist 3-regulär. P ist nicht planar. $\chi(P) = 3$, denn P ist nicht bipartit (also $\chi(P) > 2$, etwa mit Aufgabe 8). Es ist leicht, eine 3-Färbung der Ecken von P anzugeben.

Aufgabe 5. (*4 Punkte*) Beweisen Sie die folgende Formel für Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}, \qquad \text{wobei } 1 \le k \le m \le n.$$

Lösung: Es gibt verschiedene Beweise.
Beweis mit Fakultäten:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \iff \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!}$$

und auf der rechten Seite kürzen sich alle Faktoren weg.
Beweis mit fallenden Faktoriellen:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \iff \frac{n^{\underline{m}}}{m!} \cdot \frac{m^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cdot \frac{(n-k)^{\underline{(m-k)}}}{(m-k)!}$$

und die Aussage auf der rechten Seite ist wahr: $n^{\underline{k}} \cdot (n-k)^{\underline{(m-k)}} = n^{\underline{m}}$ und $m^{\underline{k}}(m-k)! = m!$.
Kominatorischer Beweis: Das Produkt der Binomialkoeffizienten auf der linken Seite zählt alle Möglichkeiten, erst m aus n zu wählen und dann k aus den m. Auf der rechten Seite erreichen wir die gleichen Auswahlen auf andere Weise: zuerst werden k aus n gewählt, und dann die k zu m ergänzt, indem aus den $n-k$ restlichen Objekten noch $m-k$ gezogen werden.

Aufgabe 6. (*8 Punkte*) Geben Sie Formeln für die die Wahrscheinlichkeiten an, beim Ziehen von sechs Karten eines Standardkartenspieles (52 Karten in den vier Farben $\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit$ und den 13 Werten 2,3,4,5,6,7,8,9,10,B,D,K,A) die folgenden Blätter zu ziehen:

(a) Alle Karten haben die gleiche Farbe.
(b) Alle Werte sind verschieden.
(c) Zwei Drillinge (etwa 2,2,2,7,7,7).
(d) Es kommen nur zwei verschiedene Werte vor.

Lösung: Der Nenner ist in allen vier Fällen $\binom{52}{6}$, denn das ist die Anzahl der Möglichkeiten, sechs Karten (ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge) aus dem Stapel von 52 zu ziehen. Wir müssen also nur noch die jeweils günstigen Ereignisse abzählen.

$$\frac{4\binom{13}{6}}{\binom{52}{6}}, \quad \frac{\binom{13}{6}4^6}{\binom{52}{6}} = \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36 \cdot 32/6!}{\binom{52}{6}}, \quad \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{3}}{\binom{52}{6}} = \frac{\binom{13}{2}4^2}{\binom{52}{6}}, \quad \frac{\binom{13}{2}4^2 + 13 \cdot 12\binom{4}{2}}{\binom{52}{6}}$$

(a): Wahl einer der vier Farben, dann Wahl von 6 Karten mit der Farbe.
(b): Auswahl von sechs Werten, dann Wahl einer beliebigen Farbe für jede Karte.
(c): Wahl von zwei Werten, danach Wahl von jeweils drei Karten mit dem Wert.
(d): Es gibt nur die Möglichkeit Doppeldrilling, also (c), und Vierling+Paar. Bei Vierling+Paar wählen wir eine Farbe für den Vierling, danach eine der restlichen 12 Farben für das Paar und anschließend zwei Farben für das Paar.

Aufgabe 7. (*4 Punkte*) In zwei Beuteln seien Karten, einmal drei Karten mit den Werten 1,2,4 und dann vier Karten mit den Werten 1,2,3,4. Wir ziehen aus jedem Beutel eine Karte und bilden das Produkt. Berechnen Sie den Erwartungswert für diesen Versuch.

Lösung: Die möglichen Ergebnisse sind alle auftretenden Produkte (1,2,3,4,6,8,12,16), aber sie sind nicht gleichverteilt. Wir zählen, wie oft jedes Produkt vorkommt:

$$\begin{array}{rll@{\qquad}rll@{\qquad}rll@{\qquad}rll} 1: & 1 & (1\cdot 1) & 2: & 2 & (2\cdot 1, 1\cdot 2) & 3: & 1 & (1\cdot 3) & 4: & 3 & (1\cdot 4, 2\cdot 2, 4\cdot 1) \\ 6: & 1 & (2\cdot 3) & 8: & 2 & (2\cdot 4, 4\cdot 2) & 12: & 1 & (4\cdot 3) & 16: & 1 & (4\cdot 4) \end{array}$$

Der Erwartungswert ist die gewichtete Summe

$$\begin{aligned} E(\text{Produkt}) &= \frac{1\cdot 1}{12} + \frac{2\cdot 2}{12} + \frac{3\cdot 1}{12} + \frac{4\cdot 3}{12} + \frac{6\cdot 1}{12} + \frac{8\cdot 2}{12} + \frac{12\cdot 1}{12} + \frac{16\cdot 1}{12} \\ &= \frac{1+4+3+12+6+16+12+16}{12} = \frac{70}{12} = 5\tfrac{5}{6} \end{aligned}$$

Aufgabe 8. (*4 Punkte*) Zeigen Sie, dass ein Graph G mit mindestens einer Kante Farbzahl 2 hat genau dann, wenn G bipartit ist.

Lösung: ($\Rightarrow$) Sei G mit $|K(G)| \geq 1$ und $\chi(G) = 2$. Wir wählen eine Eckenfärbung mit zwei Farben, so dass benachbarte Ecken verschiedene Farben bekommen (möglich wegen $\chi(G) = 2$); beide Farben treten auf wegen $|K(G)| \geq 1$. Als bipartite Zerlegung $E(G) = E_1 \cup E_2$ der Eckenmenge wählen wir die Ecken mit fester Farbe. Nach Konstruktion der Färbung gibt es keine Kanten innerhalb von E_1 und innerhalb von E_2.
($\Leftarrow$) Als bipartiter Graph hat G eine disjunkte Eckenzerlegung $E(G) = E_1 \cup E_2$, wobei es nur Katen zwischen E_1 und E_2 gibt. Wenn wir die Ecken aus E_1 in einer Farbe und die Ecken aus E_2 in einer anderen Farbe färben, zeigt das $\chi(G) \leq 2$. Weil der Graph mindestens eine Kante besitzt, ist $\chi(G) = 1$ unmöglich.

Aufgabe 9. (*4 Punkte*) Geben Sie einen endlichen Graphen G mit mindestens zwei Ecken an, der nur den trivialen Automorphismus besitzt. Begründen Sie Ihre Konstruktion.
(Ein Graphautomorphismus ist ein Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} G$. Die identische Abbildung ist immer ein Automorphismus, der „triviale Automorphismus".)

Lösung: Eine einfache Lösung ist ein Baum mit 7 Ecken, wobei von einer zentralen Ecken drei Arme der Länge 3, 2, 1 abgehen. Hier gibt es keine nichttrivialen Automorphismen, weil jeder Automorphism Eckengrade erhalten muss und somit der zentrale Knoten (Grad 3) erhalten wird, damit aber auch die Arme, da sie paarweise verschiedene Länge haben.
Die kleinstmögliche Anzahl an Ecken ist 6, ein 3-Zykel mit einem Arm der Länge der 2 und einem Arm der Länge 1. Hier gibt es keine nicht-trivialen Automorphismen, weil die Eckengrade am Dreieck 1,2,2 sind — jeder Automorphismus muss das Dreieck mit seinen Graden erhalten. Außerdem hängen an den beiden Ecken vom Grad 2 Ketten verschiedener Länge.

9 Klausur Diskrete Mathematik II

Aufgabe 1. (*10 Punkte*) Geben Sie eine Formel für die folgende Summe an, mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ (Ihre Formel soll idealerweise Potenzen enthalten):

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^4 + 2i^3 + 2i^2 - 2i.$$

Lösung: Die Summation ist einfach für die fallenden Faktoriellen $x^{\underline{k}}$, für die $\sum x^{\underline{k}} = \frac{1}{k+1} x^{\underline{k+1}}$ gilt. Man kann die Potenzen x^k von Hand durch die Faktoriellen $x^{\underline{k}}$ darstellen oder dies systematisch mit Hilfe der Stirlingzahlen 1. Art tun: $x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k}\, x^{\underline{k}}$. In jedem Fall wird

$$x^1 = x^{\underline{1}}, \quad x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \quad x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}, \quad x^4 = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

Die diskrete Stammfunktion von

$$\begin{aligned} f(x) &:= x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x \\ &= (x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x) + (2x^{\underline{3}} + 6x^{\underline{2}} + 2x) + (2x^{\underline{2}} + 2x) - 2x \\ &= x^{\underline{4}} + 8x^{\underline{3}} + 15x^{\underline{2}} + 3x \end{aligned}$$

ist somit

$$\sum f(x) = \frac{1}{5}x^{\underline{5}} + \frac{8}{4}x^{\underline{4}} + \frac{15}{3}x^{\underline{3}} + \frac{3}{2}x^{\underline{2}}$$

und mit den Stirling-Zahlen 2. Art (Basiswechsel von fallenden Faktoriellen zu Potenzen)

$$x^{\underline{5}} = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x, \quad x^{\underline{4}} = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x, \quad x^{\underline{3}} = x^3 - 3x^2 + x, \quad x^{\underline{2}} = x^2 - x$$

wird $\sum f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{10}x$. Weil die obere Summengrenze in der Aufgabe $n-1$ war, ist

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^4 + 2i^3 + 2i^2 - 2i = \frac{1}{5}n^5 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{10}n.$$

Aufgabe 2. (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, 4620 als Produkt von drei Faktoren (ungleich 1 und der Größe nach geordnet) zu schreiben, d.h.

$$4620 = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \qquad \text{mit } m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N} \text{ und } 1 < m_1 \le m_2 \le m_3.$$

Lösung: Die Primfaktorzerlegung ist $4620 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ und eine Produktdarstellung mit drei Faktoren (ungleich 1) entspricht einer Partition der Menge $\{2_1, 2_2, 3, 5, 7, 11\}$ in drei (nicht-leere) Teilmengen. Es gibt $S_{6,3}$ (Stirling-Zahl 1. Art) solcher Partitionen; diese Zahl lässt sich mit der Rekursionsformel für Stirling-Zahlen schnell berechnen:

	$k=1$	2	3	4	
$n=1$	1				
2	1	1			
3	1	3	1		
4	1	7	6	1	
5	1	15	25	10	1
6	1	31	**90**	...	

Weil aber die Partitionen $\{2_1\}, \{2_2\}, \{3, 5, 7, 11\}$ und $\{2_2\}, \{2_1\}, \{3, 5, 7, 11\}$ dieselbe Faktorisierung ergeben, lässt sich 4620 insgesamt auf $90 - 1 = 89$ Weisen als Produkt mit drei Faktoren schreiben.

Aufgabe 3. (*10 Punkte*) Berechnen Sie eine Formel für die rekursiv definierten Folgenglieder (a_n) mit $a_0 = 0$ und $a_n = 2a_{n-1} + n$ für $n > 0$.

Lösung: Mit $A(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ist

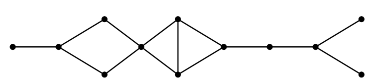
$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (2a_{n-1} + n)x^n = 2x \sum_{n>0} a_{n-1}x^{n-1} + x \sum_{n>0} nx^{n-1} \\ &= 2x \cdot A(x) + x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

also mit Umstellen und Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} A(x) &= x \cdot \frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = x \left(\frac{4}{1-2x} + \frac{2x-3}{(1-x)^2} \right) \\ &= 4x \sum_{n\geq 0} 2^n x^n + 2 \sum_{n\geq 0} nx^{n+1} - 3 \sum_{n>0} nx^n = 4x \sum_{n\geq 0} 2^n x^n + 2 \sum_{n\geq 0} (n-1)x^n - 3 \sum_{n>0} nx^n \\ &= \sum_{n\geq 0} (2^{n+1} - n - 2)x^n \end{aligned}$$

und somit $a_n = 2^{n+1} - n - 2$, passend zu den Anfangsgliedern $0, 1, 4, 11, 26, \ldots$

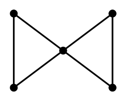
Aufgabe 4. (*4 Punkte*) Begründen Sie folgende Aussagen über den Graphen G:



1) G hat wenigstens neun verschiedene Eigenwerte.
2) Für den Spektralradius (Perron-Frobenius-Eigenwert) $\lambda_0(G)$ gilt $2 < \lambda_0(G) \leq 4$.

Lösung: 1) Der Graph G hat Durchmesser $\operatorname{diam}(G) = 8$ und nach einem Satz aus der Vorlesung hat G mindestens $1 + \operatorname{diam}(G) = 9$ verschiedene Eigenwerte.
2) In der Vorlesung wurden die Graphen mit Spektralradius ≤ 2 klassifiziert; es waren die (erweiterten) Dynkin-Diagramme. G ist nicht darunter, also muss der Spektralradius $\lambda_0(G) > 2$ sein. Außerdem hat G Maximalgrad 4, also ist nach Aufgabe 6 auch $\lambda_0(G) \leq 4$.

Aufgabe 5. (*12 Punkte*) Berechnen Sie das Spektrum des folgenden Graphen und einen positiven Eigenvektor:



Lösung: Das charakteristische Polynom ist $t^5 - 6t^3 - 4t^2 + 5t + 4 = (t-1)(t+1)^2(t^2 - t - 4)$. Das Spektrum des Graphen ist damit $\frac{1-\sqrt{17}}{2}, -1, -1, +1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}$.
Nur der Perron-Frobenius-Eigenwert $\lambda := \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ hat einen positive Eigenvektor. Man kann die Matrix $A - \lambda I$ in Zeilen-Stufen-Form bringen; etwas einfacher ist vielleicht, das Gleichungssystem direkt zu analysieren: für den Eigenvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t$ — die zentrale Ecke sei 3 — erhalten wir Gleichungen $-\lambda x_1 + x_2 + x_3 = x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0$, woraus sofort $x_1 = x_2 = \frac{-1}{1-\lambda} x_3$

folgt. Analog ist $x_3 - \lambda x_4 + x_5 = x + 3 + x_4 - \lambda x_5 = 0$, mithin $x_4 = x_5 = \frac{-1}{1-\lambda} x_3$. Weiterhin $0 = x_1 + x_2 - \lambda x_3 + x + 4 + x_5 = (\frac{-4}{1-\lambda} - \lambda) x_3$; diese Gleichung ist erfüllt wegen $\lambda(\lambda - 1) = 4$. Wir erhalten $(1, 1, \lambda - 1, 1, 1)^t = (1, 1, \frac{\sqrt{17}-1}{2}, 1, 1)^t$ als Eigenvektor zu λ.

Aufgabe 6. (*8 Punkte*) Es sei G ein ungerichteter, endlicher, zusammenhängender Graph. Wir bezeichnen mit $\lambda_0(G)$ den Spektralradius (Perron-Frobenius-Eigenwert) von G und mit $\operatorname{maxdeg}(G)$ den Maximalgrad des Graphen, also die maximale Anzahl von Nachbarn unter allen Ecken. Zeigen Sie:
1) $\lambda_0(G) \leq \operatorname{maxdeg}(G)$.
2) Gleichheit $\lambda_0(G) = \operatorname{maxdeg}(G)$ gilt genau dann, wenn G regulär ist.

Lösung: Der Graph G habe n Ecken; wir schreiben $k := \operatorname{maxdeg}(G)$ und $v := (1, 1, \ldots, 1)^t$ für den Vektor, dessen n Einträge alle 1 sind. Dann gilt $A(G) \cdot v \leq kv$, weil nach Definition von $A(G)$ der i-te Eintrag des Vektors $A(G) \cdot v$ genau der Grad der Ecke i ist. Daraus folgt wie im Beweis von Perron-Frobenius (PF4), dass $\lambda_0 \leq k$. (Sei v_0 bzw. w_0 Rechts- bzw. Links-PF-Eigenvektoren für A, also $w_0^t A = \mu_0 w_0^t$ und $A v_0 = \lambda_0 v_0$ mit $\lambda_0, \mu_0 > 0$ und $w_0 > 0$, $v_0 > 0$. Dann ist $0 < \mu_0 w_0^t v = w_0^t A v \leq k w_0^t v$ und somit $\mu_0 \leq k$. Außerdem stimmen Links- und Rechts-Spektralradien überein, $\lambda_0 = \mu_0$; das gilt für allgemeine irreduzible nicht-negative Matrizen, ist hier aber evident, weil $A = A(G)$ symmetrisch ist.)
Gleichheit wird ebenfalls behandelt wie in (PF4): $\lambda_0 = k \implies w_0^t(Av - kv) = 0$, also $Av = kv$, da $w_0 > 0$. Weiterhin folgt aus $Av = kv$, dass G ein k-regulärer Graph ist. (War Übungsaufgabe.)
Die Rückrichtung ist einfach: ist G k-regulär, dann gilt $Av = kv$, womit $k = \lambda_0$ der PF-Eigenwert von G ist und insbesondere $\lambda_0 = k = \operatorname{maxdeg}(G)$ gilt.