Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 0**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 0.1 *Vereinfachen Sie folgende Terme:*

(a) $\left(\frac{2a^2x^2}{3b^2y^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^3x^2}{3a^3y^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9a^3y^6}{8b^3x^3}\right)^2, \quad a,b,x,y > 0$

(b) $\frac{(2ax+2ay)^m(bx-by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+2}}, \quad |x| \neq |y| \ldots$

(c) $\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad a > b > 0$

(d) $\frac{\sqrt{a+b}\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^4-b^4}}, \quad a > b > 0$

(e) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \quad a,b > 0$

Aufgabe 0.2 *Sei x eine reelle Zahl ($x \in \mathbb{R}$). Ermitteln Sie x aus den folgenden Gleichungen:*

(a) $\frac{3x-10}{5x-10} + \frac{x-8}{x-2} = 2 - \frac{5x-2}{7x-14}$

(b) $\frac{6x^2}{4x^2-1} - \frac{3}{2x+1} = \frac{3x}{2x-1}$

(c) $||x+1|-2| = 1$

(d) $\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = 2\sqrt{x-1}$

(e) $2\log_2(4-x) + 4 = \log_2(x+5) - 1$

(f) $\log_5 x = \log_5 6 - 2\log_5 3$

Aufgabe 0.3 *Vereinfachen Sie:*

$$\text{(a)}\ \sin^4 x - \cos^4 x, \qquad \text{(b)}\ \sin^4 x + \frac{1}{2}\sin^2(2x) + \cos^4 x.$$

Aufgabe 0.4 *Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen:*

(a) $\frac{x^2}{x-2} < -4$

(b) $\frac{x^2}{x-2} < |x+1| - 1$

(c) $1 - \lg(2x+7) > 0$

Aufgabe 0.5 *Berechnen Sie für die Polynome*
$P_1(x) = 2x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 12x$ *und* $P_2(x) = (x-1)^2$
den Quotienten $P_1(x)/P_2(x)$.

Besprechung in der ersten Vorlesungswoche ohne Votierung!

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 1**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Gegeben seien die folgenden Aussagen:*

A: Der Studierende hat am Vorkurs zur Mathematik teilgenommen.

B: Der Studierende kommt ausgeschlafen zur Lehrveranstaltung.

C: Der Studierende besucht die Vorlesung zur Mathematik.

E: Der Studierende kann die Übungsaufgaben in der Übung vorrechnen.

F: Der Studierende beschftigt sich rechtzeitig vor der Übung mit den Übungsaufgaben.

1. *Beschreiben Sie unter Verwendung dieser Aussagen symbolisch :*
   (a) *Wenn der Studierende am Vorkurs teilgenommen hat und ausgeschlafen zur Lehrveranstaltung kommt, kann er die Übungsaufgaben vorrechnen.*
   (b) *Wenn der Studierende nicht am Vorkurs teilgenommen hat und nicht die Vorlesung besucht, aber sich mit den Übungsaufgaben rechtzeitig beschäftigt, kann er die Übungsaufgaben vorrechnen.*
   (c) *Der Studierende kann genau dann die Übungsaufgaben nicht vorrechnen, wenn er den Vorkurs nicht besucht hat oder nicht ausgeschlafen die Vorlesung besucht oder sich nicht mit den Übungsaufgaben beschäftigt.*
2. *Bilden Sie die Negation der Aussageverbindung unter* 1.(*a*) *und formulieren Sie diese in Worten.*

Aufgabe 1.2 *Schreiben Sie*

die folgenden Aussagen mit den logischen Operationszeichen:

(a) nicht nur A, sondern auch B, *(b) wenn A, so nicht B,*

(c) es ist nicht wahr, daß A, oder B, *(d) weder A noch B,*

(e) dann, aber nur dann A, wenn nicht B, *(f) A, vorausgesetzt, dass B.*

Aufgabe 1.3 *Eine Aussageverbindung wird Tautologie genannt, wenn sie unabhängig vom Wahrheitswert der zugrundeliegenden Bestandteile immer wahr ist. Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind:*

(a) $(\overline{\overline{A} \vee B}) \Longleftrightarrow (A \wedge \overline{B})$

(b) $(A \wedge (B \vee C)] \Longleftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

(c) $(\overline{A} \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (A \vee B)$

(d) $(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \Longrightarrow C))$

Aufgabe 1.4 *Schreiben Sie*

(a) die Negation folgender Aussageverbindung als Implikation:

$$A \wedge (B \Longrightarrow C)$$

(b) die folgende Aussageverbindung logisch äquivalent unter Benutzung möglichst weniger Zeichen:

$$\{[((A \wedge \overline{A}) \vee \overline{B}) \wedge (B \wedge (C \vee \overline{C}))] \Longrightarrow ((A \wedge C) \Longrightarrow B))\} \wedge A$$

Aufgabe 1.5 *Zum Beweis eines mathematischen Satzes in Form einer Implikation (a):* $A \Longrightarrow B$ *oder einer Äquivalenz (b):* $A \Longleftrightarrow B$ *kann die Gültigkeit hierzu äquivalenter Aussageverbindungen nachgewiesen werden. Begründen Sie dieses Vorgehen, indem Sie zeigen, dass die folgenden Aussageverbindungen Tautologien sind:*

(a1) $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$ *(Beweis der Kontraposition)*

(a2) $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((A \wedge \overline{B}) \Longrightarrow (C \wedge \overline{C}))$ *(Indirekter Beweis/Wiederspruchsbeweis)*

(b) $(A \Longleftrightarrow B) \Longleftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ *(Beweis beider Implikationen)*

Votierungswoche: 16.10. - 20.10.2017

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 2**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1 *Veranschaulichen Sie die folgenden Mengen geeignet, also auf einer Zahlengeraden bzw. in einem x,y- oder x,y,z-Koordinatensystem:*

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n+1}{n^2} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq n \leq 6\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x = 3 - y^2\}$

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1+2\lambda \wedge y = 1-\lambda \wedge z = 3\lambda \wedge 0 \leq \lambda \leq 3 \wedge \lambda \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 2.2 *Gegeben sei die Menge* $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *und die Menge* $N = \{1, 3, 5, 7, 13\}$.

(a) Bestimmen Sie alle Mengen A, für die gilt: $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq M$.

(b) Bestimmen Sie die Mengen B, für die gilt: $B \cap M = \varnothing \wedge B \cup M = N$.

Aufgabe 2.3 *Mit* A, B, C *werden die folgenden Punktmengen der* x, y*-Ebene bezeichnet:*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}, \quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \ \vee \ x = -y\right\},$$

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\right\}.$$

Stellen Sie folgende Mengen in der x, y*-Ebene dar:*

(a) A, B, C *und* $A \cap B \cap C$

(b) $(B \cup C) \setminus A$, $B \cup (A \setminus C)$ *und* $A \setminus (B \cup C)$.

Aufgabe 2.4 *Sei* M *eine Menge und seien* $A, B, C, D \subseteq M$ *Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:*

(a) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cup C) \setminus (B \setminus D)$,

(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 2.5 *Sei*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \ \vee \ x = 3\}, \\ B &= \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y \leq 3 \ \vee \ y = 4 \ \vee \ 5 \leq y < 6\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie $A \times B$ in der x, y-Ebene.

Votierungswoche: 23.10. - 27.10.2017

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 3**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 3.1 *Gegeben sind* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *und*

$$\begin{array}{ll} f_1 : A \to \mathbb{N}, & f_1(x) = 3x - 1; \\ f_2 : A \to \mathbb{N}, & f_2(x) = x^2 - 6x + 10; \\ f_3 : A \to \{1, 2, 5\}, & f_3(x) = x^2 - 6x + 10; \\ f_4 : A \to \{2, 5, 8, 11, 14\}, & f_4(x) = 3x - 1. \end{array}$$

(a) Welche der Abbildungen sind surjektiv, injektiv oder bijektiv?

(b) Geben Sie, wenn möglich, die Umkehrabbildungen an.

Aufgabe 3.2 *Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen* $f : A \to B$ *injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.*

(a) $A = [1, 2]$, $B = [1, 3]$, $f(x) = |x|$
(b) $A = [-1, 1]$, $B = [0, 1]$, $f(x) = |x|$
(c) $A = [0, 1]$, $B = [-\frac{1}{8}, 1]$, $f(x) = 2x^2 - x$
(d) $A = [0, 6]$, $B = [-1, 1]$, $f(x) = \sqrt{x - 5}$
(e) *Seien* M *eine beliebige Menge und* $A = B = \mathcal{P}(M)$ *ihre Potenzmenge. Für* $Q \in \mathcal{P}(M)$ *sei* $f(Q) = M \setminus Q$.

Aufgabe 3.3 *Skizziere die Graphen folgender Funktionen* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $y = f(x)$*:*

(a) $D = \mathbb{R}_{>1}$, $y = \ln(x - 1)$, *(b)* $D = \mathbb{R}_{>0}$, $y = \ln x - 1$,
(c) $D = \mathbb{R}$, $y = 2 + \cos x$, *(d)* $D = \mathbb{R}$, $y = 2 \sin 3x$,
(e) $D = \mathbb{R}_{>-1}$, $y = |x| - x$.

Aufgabe 3.4 *Seien* $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto 4x^2 + 1$ *und* $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.

(a) Untersuchen Sie f_1 *und* f_2 *auf die Eigenschaften Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.*

(b) Bestimmen Sie für die Kompositionen $f_1 \circ f_2$ *und* $f_2 \circ f_1$ *das Bild und die Fasern von 5.*

Aufgabe 3.5 *Es seien $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Geraden. Wir betrachten die Abbildungen*

$$s_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \textit{Spiegelung an } L_1,$$
$$s_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \textit{Spiegelung an } L_2.$$

Beschreiben Sie die Komposition $s_2 \circ s_1$.
(Hinweis: betrachten Sie zuerst den Fall, dass L_1 und L_2 parallel sind.)

Votierungswoche: 30.10. - 3.11.2017

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 4**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 4.1 *Ein Bit ist ein Element von* $\{0, 1\}$ *und ein Wort ist eine Folge von 16 Bits.*

(a) Wie viele verschiedene Wörter gibt es?

(b) Wie viele Wörter haben genau zehn 1?

(c) Auf wie viele Weisen kann man die Doppelbits 00, 00, 01, 01, 01, 01, 10, 11 zu einem Wort anordnen?

Aufgabe 4.2 *(a) Der Name einer Variablen in einem C-Programm ist ein Wort über dem Alphabet, das aus Kleinbuchstaben, Großbuchstaben, Ziffern und dem Unterstrich besteht. Der erste Buchstabe des Wortes darf keine Ziffer sein. Wie viele verschiedene Variablennamen in C sind möglich, wenn eine Variable durch die ersten* 8 *Zeichen festgelegt ist? (Beachte: Es sind auch Namen mit weniger als* 8 *Zeichen zulässig!)*

(b) Jeder Nutzer eines Netzwerkes hat ein Passwort, das aus 6 *bis* 8 *Zeichen besteht, wobei jedes Zeichen ein Kleinbuchstabe oder eine Ziffer ist. Jedes Passwort muss mindestens eine Ziffer enthalten. Wie viele verschiedene Passwörter sind möglich?*

Aufgabe 4.3 *Zeigen Sie die Formel* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ *auf drei Weisen:*

(a) Mit der binomischen Formel.

(b) Mit vollständiger Induktion.

(c) Mit Anzahlen von Mengen.

Aufgabe 4.4 *Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:*

(a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(b) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: *47 ist ein Teiler von* $7^{2n} - 2^n$.

(c) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 10$ gilt: $n! > 2^n > n^3$.

Aufgabe 4.5 *Finden Sie Formeln für die Zahlen $S(n)$ sowie $D(n)$ und beweisen Sie Ihre Formeln mit vollständiger Induktion.*

(a) $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

(b) Die Anzahl $D(n)$ der Diagonalen eines regelmäßigen n-Ecks ($n \geq 3$).

Votierungswoche: 6.11. - 10.11.2017

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 5**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Gegeben sei die binäre Relation $R \subset M \times M$ auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ mit $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (x,y), (4,4)\}$.*

(a) Bestimmen Sie x, y so, dass die Relation R nur reflexiv und nicht symmetrisch und transitiv wird.

(b) Bestimmen Sie x, y so, dass die Relation R nur symmetrisch und nicht reflexiv und transitiv wird.

(c) Bestimmen Sie x, y so, dass die Relation R nur transitiv und nicht reflexiv und symmetrisch wird.

Aufgabe 5.2 *Untersuchen Sie, ob folgende binäre Relationen $R \subset M \times M$ auf der Menge M Äquivalenzrelationen sind.*
Bestimmen bzw. veranschaulichen Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen.
(Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq x$.)

(a) $M = \mathbb{R}, \quad x_1 \, R \, x_2 \Leftrightarrow \lceil x_1 \rceil = \lceil x_2 \rceil$

(b) $M = \mathbb{R}^2, \quad (a,b) \, R \, (c,d) \Leftrightarrow a - d = c - b$

(c) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \geq 0\}, \quad (x_1, y_1) \, R \, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

Aufgabe 5.3 *Geben Sie einstellige Repräsentanten für die folgenden Restklassen in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ an:*

$$\overline{7} + \overline{8}, \quad \overline{7} \cdot \overline{8}, \quad \overline{6}^3, \quad \overline{8}^{1043}.$$

Bestimmen Sie multiplikative Inverse für alle $\overline{n} \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, $\overline{n} \neq \overline{0}$.

Aufgabe 5.4 *Wir betrachten die folgenden drei Vektoren in der Ebene:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie die Vektoren v_1, v_2, v_3, $-3v_1$ und $2v_1 + v_2$.

(b) Finden Sie Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.
Zeichnen Sie $\lambda_1 v_1$ und $\lambda_2 v_2$.

Aufgabe 5.5 *Berechnen Sie für die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

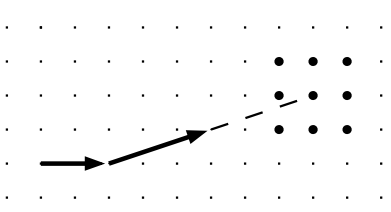
(a) $B + A^t,\ A + B^t.$

(b) $A \cdot v,\ v^t \cdot B,\ v \cdot v^t,\ v^t \cdot v,\ A \cdot B,\ B \cdot A,\ A \cdot C,\ C \cdot B,\ C^2,\ A \cdot B \cdot C.$

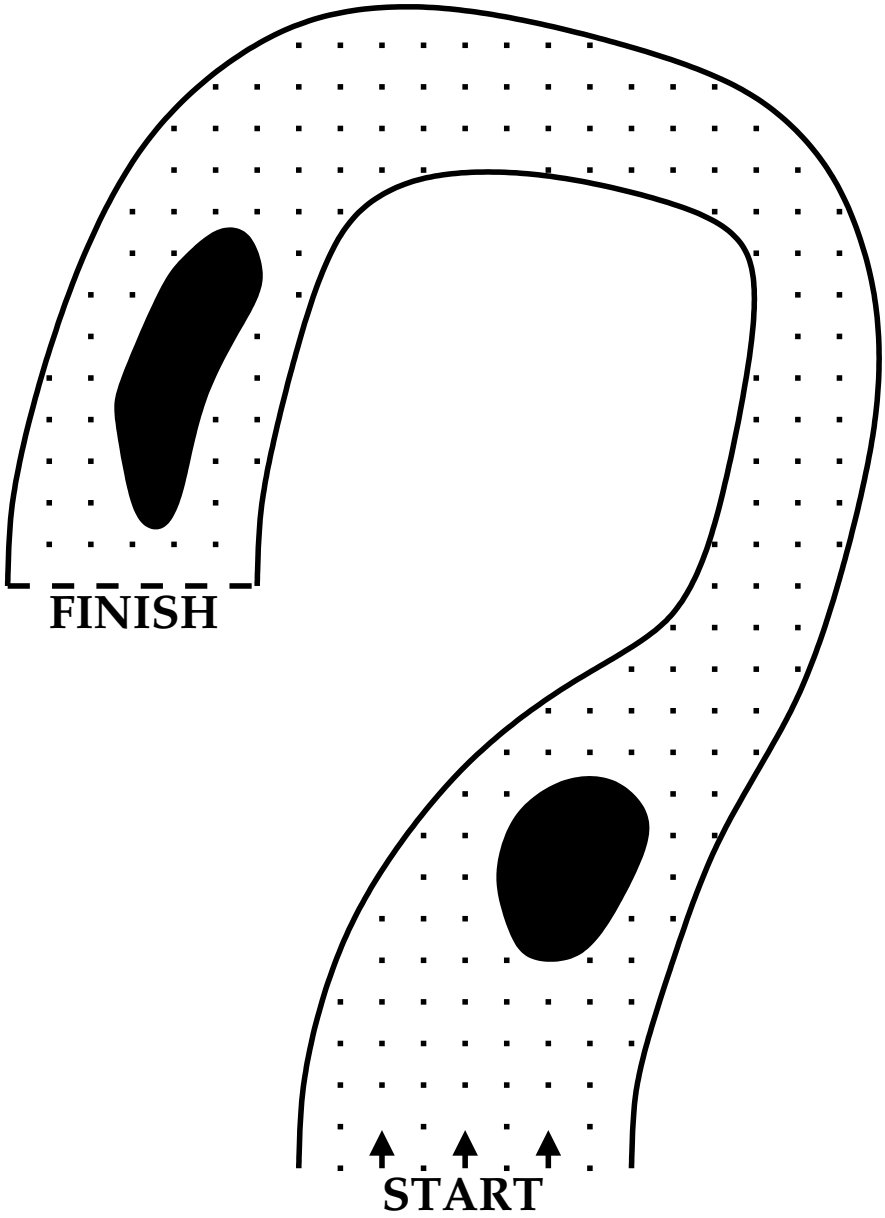
Votierungswoche: 13.11. - 17.11.2017

Eine informelle Aufgabe ohne Punkte und Votierung.

Um auf Karopapier Autorennen simulieren, kann man Geschwindigkeiten durch Pfeile zwischen Gitterpunkten darstellen. Ein Zug besteht darin, den vorigen Pfeil am Endpunkt anzutragen und einen der neun Vektoren (x, y) zu addieren, $x, y \in \{-1, 0, 1\}$. In nebenstehenden Bild sind alle • für den nächsten Zug zulässig.



Was ist die beste Zeit (d.h. die wenigsten Züge) für die folgende Rennstrecke?



Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 6**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 6.1 *Geben Sie alle Lösungen dieses Gleichungssystems an:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & & & = & 1 \\ 3x_1 & + & 9x_2 & + & 10x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & 12x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 6.2 *Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ haben folgende Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ Lösungen? Für welche α gibt es eine eindeutige Lösung?*

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & & & \alpha^2 z & = & \alpha \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_2 & = & \alpha \end{array}.$$

Aufgabe 6.3 *Berechnen Sie die Ränge der folgenden Matrizen:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.4 *Berechnen Sie die inverse Matrix von*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.5 *Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren, als Spaltenvektoren aufgefasst. Dann ist $C := v \cdot w^t$ eine $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie* $\operatorname{rg}(C) \leq 1$.

Votierungswoche: 20.11. - 24.11.2017

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 7**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 7.1 *Welche der folgenden Teilmengen von* $\mathbb{R}^3$ *sind Untervektorräume?*

$$U_1 := \{(x, y, z) \mid 3x - 4y + 2z = 0,\ x + 2y - z = 0\}$$
$$U_2 := \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$$
$$U_3 := \{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$$
$$U_4 := \{(2t + s, s, t - s) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 7.2 *Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren linear abhängig bzw. unabhängig sind. Stellen Sie bei linearer Abhängigkeit einen Vektor als Linearkombination der anderen dar. Überprüfen Sie bei linearer Unabhängigkeit, ob die Vektoren eine Basis des jeweiligen Vektorraumes bilden:*

(a) $(1, 1, 1)^t, (0, 2, 1)^t, (0, 2, 0)^t \in \mathbb{R}^3$.

(b) $(1, 1, 1, 1)^t, (2, 3, 2, 0)^t, (3, 5, 4, 2)^t, (2, 4, 5, 7)^t \in \mathbb{R}^4$.

(c) $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ *(Vektorraum der stetigen Funktionen* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*) mit* $f_1(x) = \sin^2 x, f_2(x) = \cos^2 x$ *und* $f_3(x) = \cos 2x$.

Aufgabe 7.3 *In dem Vektorraum* $V = M(2, 2, \mathbb{R})$ *der reellen* 2×2*-Matrizen betrachten wir die folgenden drei Teilmengen:*

$$S_1 := \{I_2, A, A^2, A^3\}, \qquad A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right),$$
$$S_2 := \{B, I_2 + B, I_2 + 2B\}, \qquad B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right),$$
$$S_3 := \{C, C^t, C^{-1}, C^2, (C^2)^t\}, \qquad C = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right).$$

Welche S_i *sind linear unabhängig, Erzeugendensystem oder Basis? (Hinweis: Identifizieren Sie* 2×2*-Matrizen mit Vektoren in* $\mathbb{R}^4$*.)*

Aufgabe 7.4 *Sei* $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}((1, 1, 1)^t) \subset \mathbb{R}^3$ *ein Untervektorraum und* $V := \mathbb{R}^3/U$ *der Quotientenvektorraum. Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ *sind und dass* $\overline{v}_1, \overline{v}_2 \in V$ *linear abhängig sind.*

Aufgabe 7.5 *Seien*

$$
\begin{aligned}
V &:= \mathrm{Abb}(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, && \text{(alle Funktionen } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\text{)} \\
U_1 &:= \{f \in V \mid f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\} && \text{(ungerade Funktionen) und} \\
U_2 &:= \{g \in V \mid g(-x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\} && \text{(gerade Funktionen).}
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie

(a) U_1 *und* U_2 *sind Untervektorräume von* V*.*

(b) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$*.*

(c) $V = U_1 + U_2$*.*

(Hinweis zu (c): Betrachten Sie für $h \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *die Funktionen* $\frac{h(x) \pm |h(x)|}{2}$*.)*

Votierungswoche: 27.11. - 1.12.2017

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 8**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 8.1 *Bestimmen Sie eine Basis des Quotientenraumes* $\mathbb{R}^4/U$ *mit*

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = 0, x_3 + 3x_4 = 0\}.$$

Aufgabe 8.2 *Gegeben seien die beiden Untervektorräume* $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^4$*:*

$$U_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\big((3,7,3,4)^t, (3,8,6,5)^t\big),$$
$$U_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\big((1,-1,2,1)^t, (5,1,6,5)^t\big).$$

Bestimmen Sie Basen für $U_1 \cap U_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ *und für* $U_1 + U_2 \subseteq \mathbb{R}^4$*.*

Aufgabe 8.3 *Gegeben sei die komplexe Zahl* $z = \sqrt{3} - i$*.*

(a) Berechnen und zeichnen Sie $z^2, \overline{z}, 1/z$

(b) Berechnen und zeichnen Sie $\sqrt{z}$*, also alle* $w \in \mathbb{C}$ *mit* $w^2 = z$*.*

(c) Geben Sie z *in trigonometrischer und Exponentialdarstellung an.*

(d) Berechnen Sie z^{752} *in Exponentialdarstellung.*

Aufgabe 8.4 *Berechnen Sie die Inversen folgender Elemente:*

(a) $\overline{13} \in \mathbb{F}_{31}$

(b) $\overline{230} \in \mathbb{F}_{1003}$

Aufgabe 8.5 *Bestimmen Sie die Lösung über* K *von:*

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & 6x_3 & = & 3 \end{array} \quad \text{mit } K = \mathbb{F}_7,$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcl} (3+i)\,x_1 & - & 4ix_2 & + & ix_3 & = & 2+i \\ 2x_1 & - & 2ix_2 & - & 2x_3 & = & 2-i \\ ix_1 & + & x_2 & + & (1+i)x_3 & = & i \end{array} \quad \text{mit } K = \mathbb{C}.$$

Votierungswoche: 4.12. - 8.12.2017

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 9.1 *Bestimmen Sie für die folgende ($\mathbb{F}_7$-lineare) Abbildung*

$$\alpha\colon \mathbb{F}_7^4 \to \mathbb{F}_7^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

die Dimensionen von Kern und Bild.

Aufgabe 9.2 *Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f_\alpha\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ die lineare Abbildung*

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2\alpha \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha + 2 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

und sei $\mathbf{b} = (6, -4, 6)^t$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit:

(a) $\ker(f_\alpha) = \{0\}$.

(b) $\mathbf{b}$ *hat unendlich viele Urbilder unter* f_α.

(c) $\mathbf{b} \notin \operatorname{im}(f_\alpha)$.

Aufgabe 9.3 *Wir betrachten den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V := M(2, 2, \mathbb{Q})$ der 2×2-Matrizen mit rationalen Einträgen. Wählen Sie eine Basis B für V und berechnen Sie die Abbildungsmatrix $M_B^B(\psi)$ für die folgende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung*

$$\psi\colon V \to V, \quad A \mapsto A + A^t - 2\operatorname{tr}(A) \cdot I_2$$

(dabei $I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Einheitsmatrix und $\operatorname{tr}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = a + d$ die Spur).

Aufgabe 9.4 *Es sei $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome in x vom Grad höchstens 3. Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?*

(a) $a\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}, \quad a(f) = f(1)$

(b) $b\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}, \quad b(f) = \int_0^2 f(t^2)\, dt$

(c) $c\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}, \quad c(f) = f(0) \cdot x^2 + f(1) \cdot x + 3 \cdot f(2)$

Aufgabe 9.5 *Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit den Operationen von $\mathbb{R}$ ein Körper ist. Bestimmen Sie* $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$.

Votierungswoche: 11.12. - 15.12.2017

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 10**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 10.1 *Es sei* $U := \{(x, y, z)^t \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$. *Zeigen Sie, dass die Abbildung*

$$\varphi\colon U \times U \to \mathbb{C}^3, \quad (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \mapsto \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$\mathbb{C}$*-linear ist und bestimmen Sie eine Basis von* $\ker(\varphi)$.

Aufgabe 10.2 *Wir betrachen den* $\mathbb{R}$*-Untervektorraum*

$$V := \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq 5, f(1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$$

aller reellen Polynome vom Grad höchstens 5, die 1 als Nullstelle haben. Wählen Sie eine Basis B *für* V *und geben Sie die Abbildungsmatrix* $M_B^B(\varphi)$ *der folgenden* $\mathbb{R}$*-linearen Abbildung an:*

$$\varphi\colon V \to V, \quad f(x) \mapsto (x-1) \cdot f''(x) + f(2) \cdot (x^2 - x).$$

Aufgabe 10.3 *Gegeben die Basen* $B = \{b_1, b_2, b_3\}, C = \{c_1, c_2, c_3\}$ *von* $\mathbb{F}_7^3$,

$$b_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}, \qquad c_1 = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix},$$

bestimmen Sie die Basiswechselmatrix M*, die* B*-Koeffizienten in* C*-Koeffizienten umrechnet. Testen Sie die Matrix* M *an dem Vektor* $v = 2b_1 + 3b_2 + 4b_3$.

Aufgabe 10.4 *Berechnen Sie die Determinanten dieser reellen Matrizen:*

$$A = \begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.5 *Berechnen Sie die Determinanten dieser Matrizen:*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(4, \mathbb{F}_5), \qquad D = \begin{pmatrix} i & 1 & 2-i \\ 1 & 3i & -4 \\ 1+i & -2-i & 0 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}).$$

Votierungswoche: 18.12. - 22.12.2017

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 11**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 11.1 *Bestimmen Sie alle (reellen und komplexen) Nullstellen der folgenden Polynome:*

$$\begin{aligned} &(a) \qquad p(t) = t^3 - 2t^2 - 23t - 6 \\ &(b) \qquad q(t) = t^4 + 3t^3 - 5t^2 - 6t - 8 \\ &(c) \qquad r(t) = t^9 - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 11.2 *Bestimmen Sie die Eigenwerte der reellen Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.3 *Bestimmen Sie alle Eigenwerte für die Matrix $A \in M(3, K)$ mit (a) $K = \mathbb{C}$ und (b) $K = \mathbb{F}_7$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -6 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.4 *Lösen Sie die Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda x$ mit $K = \mathbb{Q}$ durch Angabe aller Eigenwerte und der zugehörigen Eigenvektoren:*

$$(a) \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad (b) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.5 *Es seien $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 3 und $\varphi \colon V \to V, p(x) \mapsto x \cdot p'(x)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Berechnen Sie die Eigenwerte von φ in den folgenden Schritten:*

1. *Wählen Sie eine (möglichst einfache!) Basis B für V.*
2. *Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M := M_B^B(\varphi)$ von φ bezüglich B.*
3. *Berechnen Sie die Eigenwerte von M.*

Votierungswoche: 8.1. - 12.1.2018

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 12**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 12.1 *Diagonalisieren Sie die Matrix* $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in M(2, \mathbb{R})$*, bestimmen Sie also eine Matrix* $B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$*, so dass* $B^{-1}AB$ *eine Diagonalmatrix ist.*

Aufgabe 12.2 *Wir betrachten* $C \in M(3, \mathbb{Q})$ *und* $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^3$ *mit*

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 2 & 2 \\ 2 & c_2 & 1 \\ 2 & 1 & c_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

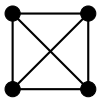
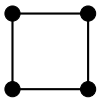
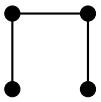
Es sei $\mathbf{x}$ *ein Eigenvektor von* C *zum Eigenwert* $\lambda_1 = 1$*.*

(a) Was folgt hieraus für die Konstanten c_1, c_2, c_3*?*
(b) Für welche c_1, c_2, c_3 *ist 1 ein doppelter Eigenwert?*
(c) Geben Sie für (b) auch den dritten Eigenwert an.

Aufgabe 12.3 *Untersuchen Sie, ob diese Matrizen diagonalisierbar sind:*

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.4 *Geben Sie Adjazenzmatrizen für die folgenden Graphen an:*

G_1 :  G_2 :  G_3 : 

Berechnen Sie die Eigenwerte für ein $A(G_i)$ *Ihrer Wahl.*

Aufgabe 12.5 *Geben Sie formale Definitionen der folgenden Begriffe:*

1. *Gerichteter Graph.*
2. *(Ungerichteter) Graph mit Schleifen.*
3. *(Ungerichteter) Graph mit Schleifen und Mehrfachkanten.*

Votierungswoche: 15.1. - 22.1.2018

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018 **Übung 13**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Gegeben seien die Vektoren*

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 - 4\sqrt{3} \\ -4 + 7\sqrt{3} \\ -8 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) *das Skalarprodukt* $\langle v_1, v_2 \rangle$*;*
(b) *die Längen* $\|v_1\|$ *und* $\|v_2\|$*;*
(c) *den Winkel* $\sphericalangle(v_1, v_2)$*;*
(d) *den Abstand* $d(v_1, v_2)$*;*
(e) *einen Vektor* $v_3 \neq 0$*, der senkrecht auf* v_1 *und* v_2 *steht.*

Aufgabe 13.2 *Eine Matrix* $A \in M(n, \mathbb{R})$ *definiert eine Abbildung*

$$b_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad b_A(v, w) := v^t A w.$$

Für welche der folgenden Matrizen $A_i \in M(2, \mathbb{R})$ *ist die Abbildung* b_{A_i} *ein Skalarprodukt, also symmetrisch, bilinear und positiv definit?*

$$A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right), \quad A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad A_4 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad A_5 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right).$$

Aufgabe 13.3 *Es sei* $s_v \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *die Spiegelung an der Ebene* $v^\perp \subset \mathbb{R}^3$ *mit* $v = (3, 4, 2)^t$*. Geben Sie die Matrixdarstellung* $M = M_E^E(s_v)$ *von* s_v *an (bezüglich der Standardbasis von* $\mathbb{R}^3$*). Testen Sie, ob für Ihre Matrix gilt:* $M^2 = I_3$*;* $\mathrm{Spur}(M) = 1$*;* $\det(M) = -1$*;* v *ist Eigenvektor von* M *(zu welchem Eigenwert?).*

Aufgabe 13.4 *Zeigen Sie, dass*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ *ist und wandeln Sie* B *mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens in eine Orthonormalbasis um.*

Aufgabe 13.5 *Bestimmen Sie den Rang der* $\mathbb{R}$*-linearen Abbildung*

$$\sigma \colon M(2, \mathbb{R}) \to M(2, \mathbb{R}), \quad A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^t).$$

Votierungswoche: 22.1. - 26.1.2018

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur

Aufgabe 1 *Diagonalisieren Sie die Matrix* $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ *und berechnen Sie* $B^{-1}AB$ *für Ihre Basis* B*.*

Aufgabe 2 *Berechnen Sie die Eigenwerte und* einen *Eigenvektor für*

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -7 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 *Berechnen Sie die Eigenwerte für*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 *Ist die folgende Abbildung injektiv?*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ 3x + 5y + z \\ -x + 5y + 8z \\ -6x + 4y + 5z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 *Berechnen Sie das Inverse der Matrix* $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{F}_{17})$*.*

Aufgabe 6 *Es seien* $U = span_{\mathbb{Q}}((1,1,1)^t, (2,3,1)^t) \subset \mathbb{Q}^3$ *und* $V := \mathbb{Q}^3/U$ *sowie* $v = (4,3,1) \in \mathbb{Q}^3$ *und* $\overline{v} \in V$ *die Klasse von* v*. Gilt* $\overline{v} = \overline{0}$ *in* V*?*

Aufgabe 7 *Wie viele Elemente hat ein 12-dimensionaler* $\mathbb{F}_2$*-Vektorraum* V*? Gegeben seien zehn paarweise verschiedene Vektoren* $v_1, \ldots, v_{10} \in V$*, wie viele Teilmengen* $\{v_i, v_j, v_k\}$ *gibt es?*

Aufgabe 8 *Es sei* $M = M(2, 2, \mathbb{R})$ *der Vektorraum der* 2×2*-Matrizen mit reellen Einträgen. Geben Sie eine Matrixdarstellung für die folgende* $\mathbb{R}$*-lineare Abbildung an:*

$$\gamma\colon M \to M, \quad A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot A.$$

Mathematik I für Informatiker – WS 2017/2018
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. David Ploog,
Dr. Michael Höding

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur

Aufgabe 1 *Diagonalisieren Sie die Matrix* $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ *und berechnen Sie* $B^{-1}AB$ *für Ihre Basis* B*.*

Lösung: Die Eigenwerte sind $3 \pm \sqrt{7}$ mit Eigenvektoren $(6, -1 \pm \sqrt{7})$.
Die Basiswechselmatrix $B = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 6 \\ -1+\sqrt{7} & -1-\sqrt{7} \end{smallmatrix}\right)$ enthält die Eigenvektoren als Spalten. Es ist $B^{-1} = \frac{1}{-12\sqrt{7}}\left(\begin{smallmatrix} -1-\sqrt{7} & -6 \\ 1-\sqrt{7} & 6 \end{smallmatrix}\right)$.
$B^{-1}AB = \left(\begin{smallmatrix} 3+\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{7} \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 2 *Berechnen Sie die Eigenwerte und* einen *Eigenvektor für*

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -7 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Eigenwerte: $3, 2, -3$.

Aufgabe 3 *Berechnen Sie die Eigenwerte für*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Eigenwerte: $2, -2, i, -i$.

Aufgabe 4 *Ist die folgende Abbildung injektiv?*

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ 3x + 5y + z \\ -x + 5y + 8z \\ -6x + 4y + 5z \end{pmatrix}$$

Lösung: Nein: die 4×3-Matrix zu f hat nur Rang 2 (sie müsste den maximalen Rang 3 haben, damit f injektiv ist). Es ist $Z3 = 5 \cdot Z1 - 2 \cdot Z2$ und $Z4 = 3Z1 - Z2$.

Aufgabe 5 *Berechnen Sie das Inverse der Matrix* $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{F}_{17})$.

Lösung: $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 16 \end{smallmatrix}\right)$.
Berechnung der inversen Matrix mit dem Gauß-Algorithmus: $(M \mid I_2)$ mit Zeilenoperationen umformen zu $(I_2 \mid M^{-1})$. Berechnung von Divisionen in $\mathbb{F}_{17}$ mit dem Euklidischen Algorithmus.
Probe: $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 12 & 16 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 120 & 153 \\ 68 & 86 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1+17\cdot 7 & 17\cdot 9 \\ 17\cdot 4 & 1+17\cdot 5 \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \bmod 17$.

Aufgabe 6 *Es seien* $U = span_{\mathbb{Q}}((1,1,1)^t, (2,3,1)^t) \subset \mathbb{Q}^3$ *und* $V := \mathbb{Q}^3/U$ *sowie* $v = (4,3,1) \in \mathbb{Q}^3$ *und* $\overline{v} \in V$ *die Klasse von* v. *Gilt* $\overline{v} = \overline{0}$ *in* V*?*

Lösung: Elemente $\overline{v} \in V/U$ sind Nebenklassen $\overline{v} = v + U = \{v + u \mid u \in U\}$. Insbesondere ist $\overline{0} = U$. Also gilt $\overline{v} = \overline{0}$ genau dann, wenn $v \in U$. Ob das der Fall ist, kann man mit einer Rangberechnung testen: die beiden U erzeugenden Vektoren bilden eine Matrix vom Rang 2. Sei r der Rang der Matrix M, wenn man noch v hinzunimmt:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $v \in U$ genau dann, wenn $r = 2$ (denn dann gibt es eine lineare Relation zwischen den Spalten, die v durch die Erzeuger von U ausdrückt. (Weil r nur 2 oder 3 sein kann, ist eine Alternative, $\det(M)$ zu berechnen: M hat maximalen Rang 3 genau dann, wenn $\det(M) \neq 0$.

Aufgabe 7 *Wie viele Elemente hat ein* 12*-dimensionaler* $\mathbb{F}_2$*-Vektorraum* V*? Gegeben seien zehn paarweise verschiedene Vektoren* $v_1, \ldots, v_{10} \in V$*, wie viele Teilmengen* $\{v_i, v_j, v_k\}$ *gibt es?*

Lösung: $|\mathbb{F}_2^{12}| = 2^{12} = 4096$.
Die Anzahl der 3-elementigen Teilmengen einer 10-elementigen Menge ist $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$. Die Aufgabe ist nicht ganz eindeutig gestellt: lässt man zu, dass $v_i = v_j$ usw. auftreten kann, dann muss man die Teilmengen mit 1, 2 oder 3 Elementen zusammenfassen: $\binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{1} = 120 + 45 + 10 = 175$.

Aufgabe 8 *Es sei $M = M(2,2,\mathbb{R})$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen. Geben Sie eine Matrixdarstellung für die folgende $\mathbb{R}$-lineare Abbildung an:*

$$\gamma\colon M \to M, \quad A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot A.$$

Lösung: Die üblichen drei Schritte:

1. Basiswahl: die einfachste Basis ist

$$B = \left\{ b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), b_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$

Weil γ von M nach M abbildet, nehmen wir natürlich dieselbe Basis für Start und Ziel.

2. Darstellung der Bilder $\gamma(b_i)$ in der Basis. Hier: $\gamma(b_1) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 3b_1 + 4b_3$, $\gamma(b_2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) = 3b_2 + 4b_4$, $\gamma(b_3) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 2b_1 + b_3$, $\gamma(b_4) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 2b_2 + b_4$.

3. Die Koeffizienten aus Schritt 2 spaltenweise in eine Matrix eintragen:

$$M_B^B(\gamma) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$