# Vorlesung „Homologische Algebra“

Sommersemester 2005, FU Berlin
Kontakt: David Ploog, `ploog@math.fu-berlin.de`
Insgesamt 13 Vorlesungen und es gab zwei Aufgaben pro Woche.

**Themen:**
Komplexe von Moduln (Exaktheit, Homotopie, Quasiisomorphismen)
Abelsche Kategorien (adjungierte/halbexakte Funktoren, Tensorprodukt)
Derivierte Funktoren (Auflösungen, Tor, Ext und Erweiterungen)
Garben (welke/weiche/feine Garben, Vergleich mit topologischer Kohomologie)

**Nicht gemacht:**
Doppelkomplexe, Spektralsequenzen
Limiten
Koszul-Komplex
Globale Dimension $< \infty \iff$ Ring regulär
Derivierte Kategorien
Čech-Kohomologie

Literatur für homologische Algebra:

**C.A. Weibel:** An introduction to homological algebra. (Cambridge, 1994)
Klassischer Zugang (derivierte Funktoren als universelle $\delta$-Funktoren);
frühe Einführung und Anwendung von Spektralsequenzen.

**S.I. Gelfand, Y.I. Manin:** Methods of homological algebra. (Springer, 2003 2nd ed)
Moderne Darstellung homologischer Algebra: Derivierte Kategorien in Kapitel 3,
triangulierte Kategorien in Kapitel 4.

Literatur zu Garbenkohomologie:

**M. Kashiwara, P. Shapira:** Sheaves on manifolds. (Springer, 1990)
Derivierte Kategorien in Kapitel 1, Garben in Kapitel 2.
Im Weiteren mikrolokale Analysis.

**R. Hartshorne:** Algebraic Geometry. (Springer, 1976)
Garben in §II.1; Übungsaufgaben beachten! Garbenkohomologie in §IV.1,§IV.2.
Anwendung auf algebraische Geometrie.

**B. Iversen:** Cohomology of Sheaves. (Springer, 1980)
Homologische Algebra in Kapitel 1, Garben in Kapitel 2.
Im Weiteren algebraische Topologie.

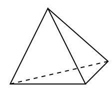
**F. Warner:** Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. (Springer, 1983)
Beweis des DeRham-Theorems mit Garbenkohomologie in Kapitel 5.

# Aufgaben zur homologischen Algebra

**Aufgabe 1.** Eine Sequenz $N' \to N \to N'' \to 0$ von $A$-Moduln ist exakt genau dann, wenn die Sequenzen $0 \to \mathrm{Hom}_A(N'', L) \to \mathrm{Hom}_A(N, L) \to \mathrm{Hom}_A(N', L)$ exakt sind für alle $A$-Moduln $L$.

*Lösung:* Atiyah-MacDonald Proposition 2.9

**Aufgabe 2.** Man berechne explizit den simplizialen Komplex $K_\bullet(T)$ der Tetraederoberfläche $T$. Daraus bestimme man die simpliziale Homologie $H_i(T)$ für $i = 0, 1, 2$. Was passiert, wenn man den Volltetraeder betrachtet?



**Aufgabe 3.** Für einen Komplex $C_\bullet$ sei $H_\bullet$ der Komplex mit $H_i := H_i(C_\bullet)$ und trivialen Differenzialen. Wenn $C_\bullet$ zerfällt, so sind $C_\bullet$ und $H_\bullet$ homotopieäquivalent. Weiter zeige man, dass die Umkehrung falsch ist.

*Lösung:* Weibel: Exercise 1.4.4.
Ein Komplex $C_\bullet$ zerfällt, wenn es Abbildungen $s_i : C_i \to C_{i-1}$ (entgegen den Differenzialen) gibt mit $dsd = d$. Zerfallende kurze exakte Sequenzen sind ein Spezialfall. Es gilt: $C_\bullet$ zerfällt $\iff$ es gibt Zerlegungen $C_i \cong Z_i \oplus B_i'$ und $Z_i \cong B_i \oplus H_i$. $C_\bullet$ zerfallend exakt $\iff$ zusätzlich $H_i = 0$.

**Aufgabe 4.** Im nebenstehenden kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen seien $f^1$, $f^2$, $f^4$, $f^5$ Isomorphismen. Dann ist $f^3$ ebenfalls ein Isomorphismus. Kann man die Voraussetzungen abschwächen?

$$\begin{tikzcd}
M^1 \arrow[r, "\mu^1"] \arrow[d, "f^1"] & M^2 \arrow[r, "\mu^2"] \arrow[d, "f^2"] & M^3 \arrow[r, "\mu^3"] \arrow[d, "f^3"] & M^4 \arrow[r, "\mu^4"] \arrow[d, "f^4"] & M^5 \arrow[d, "f^5"] \\
N^1 \arrow[r, "\nu^1"] & N^2 \arrow[r, "\nu^2"] & N^3 \arrow[r, "\nu^3"] & N^4 \arrow[r, "\nu^4"] & N^5
\end{tikzcd}$$

**Aufgabe 5.** Für eine natürliche Zahl $n$ sei $[n] := \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Man zeige, dass $\mathrm{Ob}(\mathbf{\Delta}) := \{[0], [1], \ldots\}$ und $\mathrm{Mor}_{\mathbf{\Delta}}([n], [m]) := \{f : [n] \to [m] \;:\; i \le j \implies f(i) \le f(j)\}$ eine Kategorie $\mathbf{\Delta}$ definiert, die *simpliziale Kategorie*. Wie viele Morphismen $[n] \to [m]$ gibt es? Was sind Anfangs- und Endobjekt?
Für $i = 0, \ldots, n$ gibt es Morphismen $\delta_i^n : [n] \to [n+1]$ (Weglassen von $i$) und für $j = 0, \ldots, n-1$ gibt es Morphismen $\sigma_j^n : [n+1] \to [n]$ ($j$ tritt doppelt auf). Man zeige, dass jeder Morphismus $f : [n] \to [m]$ eine eindeutige Darstellung $f = \delta_{i_1} \ldots \delta_{i_k} \sigma_{j_1} \ldots \sigma_{j_h}$ mit $m > i_1 > \cdots > i_k \ge 0$ und $0 \le j_1 < \cdots < j_h < n-1$ hat.

*Lösung:* $\#\,\mathrm{Mor}_{\mathbf{\Delta}}([n], [m]) = \binom{n+m-1}{n}$.

**Aufgabe 6.** Wir betrachten die Kategorien **Set** der Mengen, **Gr** der Gruppen, **Ab** der abelschen Gruppen, **Top** der topologischen Räume und **Met** (bzw. **ComMet**) der (vollständigen) metrischen Räume. Welche der folgenden neun Vergiss-Funktoren **Ab** $\to$ **Gr** $\to$ **Set** und **ComMet** $\to$ **Met** $\to$ **Top** $\to$ **Set** haben Linksadjungierte?

*Lösung:* Alle haben Linksadjungierte außer **ComMet** $\to$ **Top**, **Met** $\to$ **Top**. Linksadjungierter zu **Ab** $\to$ **Gr** ist $G \mapsto G/[G, G]$.

**Aufgabe 7.** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Man zeige, dass die Kategorie $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ der Komplexe von $\mathcal{A}$-Objekten (mit Komplexmorphismen) eine abelsche Kategorie ist.

*Lösung:* Weibel Theorem 1.2.3

**Aufgabe 8.** Es sei $A$ ein nullteilerfreier Ring. Die *Torsion* eines $A$-Moduls $M$ ist die Teilmenge $T(M) := \{m \in M \ : \ am = 0$ für ein $a \in A, a \neq 0\}$. Man zeige, dass dies einen linksexakten Funktor $T : A$-**Mod** $\to A$-**Mod** liefert. Des weiteren gebe man eine natürliche Transformation $T \to \mathrm{id}$ an. Sind die vollen Unterkategorien von $A$-**Mod** der Torsionsmoduln (d.h. $T(M) = M$) bzw. der torsionsfreien Moduln ($T(M) = 0$) abelsch?

*Lösung:* $\{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \ : \ T(M) = M\}$ ist abelsch, $\{M \in A\text{-}\mathbf{Mod} \ : \ T(M) = 0\}$ dagegen nicht.

**Aufgabe 9.** Für den $A$-Modul $M$ sei $T^0(M) := A$ und $T^r(M) := T^{r-1}(M) \otimes_A M = M^{\otimes r}$; $U_r \subset T^r(M)$ sei der von allen $m_1 \otimes \cdots \otimes m_r - m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(r)}$ erzeugte Untermodul, wobei $m_i \in M$, $\sigma \in S_n$. Die *$r$-te symmetrische Potenz* von $M$ ist $S^r(M) := T^r(M)/U_r$ und man nennt $S(M) := \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} S^r(M)$ die *symmetrische Algebra* von $M$. Man zeige, dass dies einen Funktor $S : A$-**Mod** $\to A$-**Alg** gibt, der linksadjungiert zum Vergiss-Funktor $A$-**Alg** $\to A$-**Mod** ist. Weiter gilt $S(M \oplus N) = S(M) \otimes S(N)$. Was ist $S(A^{\oplus r})$?

*Lösung:* $S(A^{\oplus r}) \cong A[x_1, \ldots, x_r]$
Für die symmetrische Algebra siehe auch Weibel Examples 8.6.16–18

**Aufgabe 10.** Man berechne $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$.

*Lösung:* $\mathbb{Z}/(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(m) \cong \mathbb{Z}/(m, n)$

**Aufgabe 11.** Man zeige, dass das Ideal $I \subset A$ projektiv ist, das Ideal $J \subset B$ aber nicht:
$A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 + x), \quad I = (x, y),$ $\qquad B = \mathbb{C}[x, y]/(xy), \quad J = (x, y).$

*Lösung:* $I \subset A$ ist ein Ideal mit zwei Erzeugern, d.h. $A^2 \to I \to 0$, $(1, 0) \mapsto x$, $(0, 1) \mapsto y$ und man sucht einen Schnitt. Mit `Singular` erhalten: $I \to A^2$, $x \mapsto (x^2, -y)$, $y \mapsto (xy, -x^2 + 1)$.
Lösung von Hand: bestimmen zuerst eine Präsentation $A^2 \xrightarrow{N} A^2 \to I \to 0$ von $I$.

$$N = \begin{pmatrix} -y & x \\ x^2-1 & -y \end{pmatrix} \qquad \begin{tikzcd} A^2 \arrow[r, "N"] & A^2 \arrow[r] \arrow[d, "X"] & I \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A^2 \arrow[r] & A^2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A^2 \arrow[r, "N"] & A^2 \arrow[r] \arrow[d, "Y"] \arrow[dl, "Z"'] & I \arrow[r] & 0 \\ A^2 \arrow[r] & A^2 \arrow[r] & I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad X = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ -y & 1-x^2 \end{pmatrix}$$

Damit $X$ eine Abbildung auf $I$ gibt, muss $XN = 0$ gelten. Eine beliebige Abbildung $Y$ ist 0 auf $I \iff$ es gibt $Z$ mit $Y = NZ$. Suchen also $X = I_2 + NZ$ mit $XN = 0 \implies$ lineares Gleichungssystem.
$J$ ist nicht projektiv, da nicht flach: die Inklusion $(x) \hookrightarrow B$ wird nach Tensorieren mit $J$ zu $(x) \otimes (x, y) \to (x, y)$, $f(x) \otimes g(x, y) \mapsto fg$. Aber mit $f(x) = x$ und $g(x, y) = y$ ist $fg = 0$ in $B$.
Für die Aufgabe $C = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 + 1)$ und $K = (x - 1, y)$ gibt `Singular` den Schnitt $K \to C^2$, $x \mapsto \frac{1}{3}(-x^2 - x + 2, y)$, $y \mapsto \frac{1}{3}(-xy - 2y, x^2 + x + 1)$.

**Aufgabe 12.** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $P_\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ ein Komplex. Zeige, dass $P_\bullet$ ein projektives Objekt in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ genau dann ist, wenn $P_\bullet$ ein zerfallender azyklischer Komplex von $\mathcal{A}$-projektiven Objekten ist. Daraus schließe man, dass mit $\mathcal{A}$ auch $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ genügend viele Projektive hat.

*Lösung:* Weibel: Exercises 2.2.1, 2.2.2.

**Aufgabe 13.** Für abelsche Gruppen $M, N$ und $k \geq 2$ gilt $\mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}}(M, N) = 0$.

*Lösung:* Lösen $N$ injektiv auf: $0 \to N \to I^0 \xrightarrow{d} I^1 \to \cdots$. Nun ist $I \in \mathbb{Z}$-**Mod** injektiv $\iff$ $I$ divisibel als abelsche Gruppe. Mit $I^1$ ist auch $\mathrm{Coker}(d) = I^1/d(I^0)$ divisibel; also $0 \to N \to I^0 \to I^1/d(I^0) \to 0$ eine injektive Auflösung. Daraus folgt sofort $\mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}}(M, N) = 0$ für $k \geq 2$.

**Aufgabe 14.** Man beweise das Hufeisen-Lemma: Es seien eine kurze exakte Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ und projektive Auflösungen $P'_\bullet \to M'$ sowie $P''_\bullet \to M''$ gegeben. Dann gibt es eine projektive Auflösung $P_\bullet \to M$, die in die kurze exakte Folge von Komplexen $0 \to P'_\bullet \to P_\bullet \to P''_\bullet \to 0$ passt.

*Lösung:* Weibel Lemma 2.2.8.
$P_i = P'_i \oplus P''_i$, aber die Differenziale sind nicht die direkte Summe. Projektivität von $P''_0$ und die Surjektion $M \to M'' \to 0$ geben einen Lift $P''_0 \to M$ und damit $P_0 \to M$. Jetzt Kerne vom $P^*_0 \to M^*$-Niveau nehmen und Induktion.

**Aufgabe 15.** Für Ideale $I, J \subset A$ gilt $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \cong (I \cap J)/IJ$.

*Lösung:*
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & IJ \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d] & I \otimes A/J \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[r] & A \arrow[r] & A/J \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
ist ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen; Schlangen-Lemma anwenden.

Zum Beispiel $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) \cong (\mathrm{lcm}(m, n))/(mn) = \mathbb{Z}/(m, n)$.

**Aufgabe 16.** (Dimensionsverschiebung) Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ rechtsexakter Funktor und $0 \to M_m \to P_m \to \cdots \to P_0 \to A \to 0$ exakte Folge in $\mathcal{A}$ mit $F$-azyklischen $P_i$. Zeige $L_iF(A) \cong L_{i-m-1}F(M_m)$ für $i \geq m+2$ sowie $L_{m+1}F(A) = \ker(F(M_m) \to F(P_m))$. Daraus folgere man, dass die abgeleiteten Funktoren $L_iF$ auch mit Auflösungen aus $F$-azyklischen Objekten berechnet werden können.

*Lösung:* Weibel Exercise 2.4.3. Am Besten erst den Fall $m = 0$ verstehen.

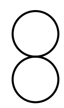
**Aufgabe 17.** Es seien $I \subset A$ ein endlich erzeugtes Ideal und $M$ ein $A$-Modul. Man zeige, dass $H^0_I(M) := \{m \in M \ : \ I^k m = 0 \text{ für ein } k > 0\}$ einen linksexakten Funktor $H^0_I : A$-**mod** $\to A$-**mod** definiert. Es seien $H^i_I(M) := (R^i H^0_I)(M)$ für $i > 0$.
Für $A = \mathbb{Z}$, $I = (n) \subset \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ und $i = 0, 1$ berechne man $H^i_{(n)}(\mathbb{Z})$ und $H^i_{(n)}(\mathbb{Z}/(k))$.

*Lösung:* Schreibe $H^i_n(A) := H^i_{(n)}(A)$. Die injektive Auflösung $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ gibt $H^0_n(\mathbb{Z}) = H^0_n(\mathbb{Q}) = 0$ und $H^1_n(\mathbb{Z}) = H^0_n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}_n = \{\frac{m}{n^l} : m \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ (Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ in $n$). Aus $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/k \to 0$ oder $0 \to \mathbb{Z}/k \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ folgt $H^0_n(\mathbb{Z}/k) = \ker(\mathbb{Z}_n/\mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/f(n,k)$, dabei ist $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auf Primzahlen definiert durch $f(p^n, p^k) := p^{(1-\delta_{n,0})k}$ und multiplikativ fortgesetzt, zum Beispiel $H^0_2(\mathbb{Z}/12) = \mathbb{Z}/4$. Weiter $H^1_n(\mathbb{Z}/k) = \mathrm{Coker}(\mathbb{Z}_n/\mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n/k\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/g(n,k)$ mit $g(n,k) := k/f(n,k)$, etwa $H^1_2(\mathbb{Z}/12) = \mathbb{Z}/3$.

**Aufgabe 18.** Mittels Torsionsuntergruppen und Erweiterungen zeige man, dass die abelschen Gruppen $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ isomorph sind.

*Lösung:* $T(S^1) = T(\mathbb{C}^*) = \{e^{2\pi i t} : t \in \mathbb{Q}\}$; die beiden Quotienten $S^1/T(S^1)$ und $\mathbb{C}^*/T(\mathbb{C}^*)$ sind $\mathbb{Q}$-Vektorräume (wegen torsionsfrei und divisibel) mit überabzählbarer Basis, also nach Basiswahl (Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese) isomorph. Weiter ist die Erweiterung $0 \to T(S^1) \to S^1 \to S^1/T(S^1) \to 0$ trivial (analog für $\mathbb{C}^*$) wegen $\mathrm{Ext}^1(X, S^1) = 0$, da $S^1$ divisibel. Insgesamt also $S^1 \cong T(S^1) \oplus S^1/T(S^1) \cong T(\mathbb{C}^*) \oplus \mathbb{C}^*/T(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{C}^*$.

**Aufgabe 19.** Seien $U_1, U_2 \subset X$ offen und $Z_1, Z_2 \subset X$ abgeschlossen sowie $F$ Garbe auf $X$. Dann sind $0 \to F_{U_1 \cup U_2} \to F_{U_1} \oplus F_{U_2} \to F_{U_1 \cap U_2} \to 0$ und $0 \to F_{Z_1 \cap Z_2} \to F_{Z_1} \oplus F_{Z_2} \to F_{Z_1 \cup Z_2} \to 0$ exakte Folgen in $\mathbf{Sh}(X)$. Man berechne damit $H^1(S^1, \mathbb{Z})$ und $H^1(S^1 \vee S^1, \mathbb{Z})$.



$S^1 \vee S^1$

*Lösung:* Es sind $F_U$ und $F_Z$ die eindeutig bestimmten Garben auf $X$ mit

$$(F_U)_x = \begin{cases} F_x, & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases} \qquad (F_Z)_x = \begin{cases} F_x, & x \in Z \\ 0, & x \notin Z \end{cases}$$

Dabei ist $F_U \subset F$ Untergarbe und es gibt eine kanonische Abbildung $F \to F_Z$. Die Exaktheit der Sequenzen sieht man an den Halmen.

**Aufgabe 20.** Es sei $F$ eine Garbe auf $X$ und $Z \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Man nennt $H^0_Z(X, F) := \{s \in H^0(X, F) : \mathrm{supp}(s) \subset Z\}$ die *globalen Schnitte von $F$ mit Träger in $Z$*. Zeige, dass $H^0_Z(X, \cdot) : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Ab}$ ein linksexakter Funktor ist; die rechtsabgeleiteten Funktoren seien $H^i_Z(X, \cdot)$. Für einen kommutativen Ring $A$, ein endlich erzeugtes Ideal $I \subset A$ und einen endlich erzeugten $A$-Modul $M$ zeige man $H^i_I(M) = H^i_{V(I)}(\mathrm{Spec}(A), \tilde{M})$.

*Lösung:* $\{m \in M : I^k m = 0 \text{ für } k \gg 0\} \overset{!}{=} \{m \in M : m_P \neq 0 \implies P \supset I \text{ für } P \in \mathrm{Spec}(A)\}$.
Sei zuerst $I^k m = 0$ und $m_P \neq 0$. Gäbe es ein $a \in I \setminus P$, so wäre $a^k m = 0$ in $M$ (und damit auch in $M_P$), aber auch $a \in (A_P)^*$ (und damit $a^k m \neq 0$ in $M_P$). Also $H^i_I(M) \subset H^i_{V(I)}(\mathrm{Spec}(A), \tilde{M})$. Für die Rückrichtung siehe Hartshorne „Local Cohomology“.
Warnung: Falls $I$ und $M$ nicht endlich erzeugt sind, stimmen beide Seiten nicht mehr überein. Die Definition mit Garbenkohomologie ist dann zu nehmen.

**Aufgabe 21.** Sei $k$ ein Körper und $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x])$ die affine Gerade über $k$. Für zwei abgeschlossene Punkte $x, y \in \mathbb{A}^1_k$ sei $U := \mathbb{A}^1_k \setminus \{x, y\}$. Man berechne $H^1(\mathbb{A}^1_k, \mathbb{Z}_U)$.

**Aufgabe 22.** Man zeige für eine der folgenden Kategorien, dass sie nicht genügend Projektive enthält: $\mathbf{Sh}(S^2)$ (etwa $\mathbb{Z}_{S^2}$) oder $\mathbf{Coh}(\mathbb{P}^1_k)$ (etwa $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$) oder $\mathbf{Mod}(\mathbb{Q}_\mathbb{R})$.

*Lösung:* Hartshorne Exercise III. für $\mathbf{Coh}(\mathbb{P}^1_K)$. Kashiwara-Shapira Exercise II.23 für $\mathbf{Mod}(\mathbb{Q}_\mathbb{R})$.

**Aufgabe 23.** Man finde einen lokal kompakten topologischen Raum $X$ und eine Garbe $F \in \mathbf{Sh}(X)$, die weich, aber nicht fein ist. Zusatzfrage: analog mit $k$-weich und weich.

**Aufgabe 24.** Sei $X$ eine parakompakter Hausdorff-Raum und $k$ ein Ring. Für $U \subset X$ offen und $p \in \mathbb{N}$ sei $A^p(U,k) := \{$Funktionen $f : U^{p+1} \to k\} \in \mathrm{Mod}(k)$. Weiter sei
$d : A^p(U,k) \to A^{p+1}(U,k), \quad df(x_0,\ldots,x_{p+1}) := \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i f(x_0,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{p+1})$.
$(A^\bullet(U,k), d)$ ist ein Komplex von $k$-Moduln. Für $V \subset U$ gibt es Einschränkungen $A^p(U,k) \to A^p(V,k)$ und dadurch wird $A^p(\cdot,k)$ zu einer Prägarbe von $k$-Moduln, die keine Garbe ist; es bezeichne $\mathcal{A}^p_{X,k}$ die Vergarbung, so dass $\mathcal{A}^p_{X,k} \in \mathrm{Mod}(k_X)$ ($k_X$ ist die konstante Ringgarbe mit Halm $k$). Man zeige, dass $d$ eine exakte Sequenz
$0 \to k_X \to \mathcal{A}^0_{X,k} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1_{X,k} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2_{X,k} \xrightarrow{d} \ldots$ induziert. Schließlich zeige man, dass alle $\mathcal{A}^p_{X,k}$ fein sind. Damit ist $\mathcal{A}^\bullet_{X,k}$ eine feine Auflösung von $k_X$!

*Lösung:* Warner §5.26 (p 186).

SINGULAR-Skript `sectionid` von Robert Vollmert zur Berechnung eines Schnittes für Modulhomomorphismen (`vollmert@math.fu-berlin.de`)

```
info="
LIBRARY:   section.lib  Sections of homomorphism
AUTHOR:    Robert Vollmert, email: vollmert@math.fu-berlin.de

KEYWORDS:  section, homomorphism

PROCEDURES:
  section(matrix,matrix,matrix)  return section of homomorphism
";

LIB "homolog.lib";

proc section(matrix M, matrix N, matrix A)
"USAGE:    section(M, N, A); M, N matrices presenting M',N';
                             A matrix representing homomorphism M' --A'-> N'
RETURN:   matrix representing section of A' if it exists
SEE ALSO:  sectionid, Hom, homolog_lib
KEYWORDS: section, homomorphism
EXAMPLE:  example section; shows an example"
{
  // F1 --M-> F0 --> M' --> 0
  //          |^     |
  //          A|     A'
  //          |S     |
  //          v|     v
  // G1 --N-> G0 --> N' --> 0

  int f1 = nrows(M);
  int f0 = ncols(M);
  int g1 = nrows(N);
  int g0 = ncols(N);

  // assert nrows(A) == f0
  if (nrows(A) != f0) {
     ERROR("nrows(A) != ncols(M)");
  }
  // assert ncols(A) == g0
  if (ncols(A) != g0) {
     ERROR("ncols(A) != ncols(N)");
  }

  // compute submodule of Hom(G0,F0) of matrices defining maps N' -> F0
  //   (hence maps N' -> M')

  matrix MG1 = kohom(M,g1);     // Hom(G1,F1) -- M_* -> Hom(G1,F0)
  matrix NF0 = kontrahom(N,f0); // Hom(G0,F0) -- N^* -> Hom(G1,F0)

  // we want the kernel of Hom(G0,F0) -- N^* -> Hom(G1,F0)/im(M_*)
  matrix homNM = modulo(NF0,MG1);

  // compute image of homNM in Hom(G0,G0) under composition with A
  matrix compA = kohom(A,g0)*homNM;

  // compute submodule of Hom(G0,G0) of matrices inducing N' --0-> N'
  //   (write G1b = G1, G0b = G0 for the presentation of the range)
  matrix NG1 = kohom(N,g1);       // Hom(G1,G1b) -> Hom(G1,G0b)
  matrix NG0b = kontrahom(N,g0);  // Hom(G0,G0b) -> Hom(G1,G0b)
  matrix NG0 = kohom(N,g0);       // Hom(G0,G1b) -> Hom(G0,G0b)

  matrix homNN = modulo(NG0b,NG1);   // matrices defining maps N' -> N'
  matrix khomNN = modulo(homNN,NG0); // the kernel of R^k --homNN-> Hom(G0,G0b) --> Hom(N',N')
  matrix homNNzero = homNN*khomNN;   // matrices defining N' --0-> N'

  // find a representative of e+homNNzero in compA
  matrix e = transpose(flatten(unitmat(g0))); // represent matrix as vector

  matrix g = lift(concat(compA,homNNzero), e); // error occurs here if section doesn't exist

  matrix r = sec(g,1,ncols(compA));
  matrix S = homNM * r;       // the section as vector
  matrix Smat = mat(S,g0,f0); // the section as matrix
  return(Smat);
}
example {
  "EXAMPLE:"; echo = 2;
  ring R = 0,(x,y),dp;
  qring Q = std(y2-x3+x);
```

```
  ideal I = x,y;
  matrix N = syz(I);     // presentation of I
  matrix M[1][2];        // presentation of Q^2
  matrix A = unitmat(2); // matrix representing the canonical surjection Q^2 -> I

  matrix S = section(M, N, A); // section I -> Q^2 of A

  reduce(ideal(S*N), std(0)); // S*N = 0, i.e., S represents a map I -> Q^2

  ideal J = matrix(I) * S;
  reduce(J, std(0)); // gives I, so S represents the identity
}

proc sectionid(ideal I)
"USAGE:    sectionid(I); I ideal
RETURN:   matrix representing section of canonical surjection R^k -> I
SEE ALSO: section
KEYWORDS: section, ideal"
{
  int n = ncols(I);
  matrix N = syz(I);
  matrix M[1][n];
  matrix A = unitmat(n);
  return(section(M,N,A));
}

static proc vec(matrix M)

"convert matrix in R^{mxn} to vector in R^{m*n}"

{
  vector v; int j = 1; int r,c;
  for (r = 1; r <= nrows(M); r++) {
    for (c = 1; c <= ncols(M); c++) {
      v = v + M[r,c]*gen(j);
      j++;
    }
  }
  return(v);
}

static proc mat(matrix v, int m, int n)

"convert vector (given as matrix) in R^{m*n} to matrix in R^{mxn}"

{
  matrix M[m][n]; int j = 1; int r,c;
  for (r = 1; r <= m; r++) {
    for (c = 1; c <= n; c++) {
      M[r,c] = v[j,1];
      j++;
    }
  }
  return(M);
}

static proc matv(vector v, int m, int n)

"convert vector in R^{m*n} to matrix in R^{mxn}"

{
  matrix M[m][n]; int j = 1; int r,c;
  for (r = 1; r <= m; r++) {
    for (c = 1; c <= n; c++) {
      M[r,c] = v[j];
      j++;
    }
  }
  return(M);
}

static proc sec(matrix m, a, b)

"return [m[a,1],...,v[b,1]]"

{
  matrix n[b-a+1][1];
  for (int i = 1; i <= b-a+1; i++) {
    n[i,1] = m[a+i-1,1];
  }
  return(n);
}
```