Topologie I

David Ploog, Sommersemester 2006

- Abzählbarkeitsaxiome
- Folgen (nur sinnvoll mit Abz_2 und T_2)
- Stetigkeit und Folgenstetigkeit
- Homöomorphismen, z.B. stereografische Projektion
- Trennungsaxiome, Urysohn-Lemma
- Konstruktionen I: Summe, Produkt, induzierte Topologie, Quotienten
- topologische Mannigfaltigkeiten, $\mathcal{C}^\infty$-Strukturen, z.B. S^n, $\mathbb{P}^n_\mathbb{R}$
- Zusammenhang, Bogenzusammenhang, lokale Versionen, Komponenten
- Kompaktheit, Folgenkompaktheit, 1-Punkt-Kompaktifizierung
- Konstruktionen II: Zusammenziehung, Suspension, Abbildungskegel, Faserprodukt, Identifizierung in Räumen, z.B. Flächen, Verklebung mittels Abbildungen, zusammenhängende Summe von Mannigfaltigkeiten, Gruppenwirkungen und Orbiträume
- Ringe stetiger Funktionen: Zariski-Topologie, Gelfand-Kolmogorov-Stone
- Kategorien und Funktoren, z.B. $\mathit{Top} \to \mathit{Ringe}$, $X \mapsto C(X)$

- Homotopien von Abbildungen und Räumen
- Deformationen und Retrakte, z.B. Gram-Schmidt: $\mathrm{GL}(n) \to \mathrm{O}(n)$
- Fundamentalgruppe, z.B. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, damit Fundamentalsatz der Algebra. Seifert-van Kampen, damit z.B. $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$
- Überlagerungen: Homotopieliftung, Liftungskriterium, Existenz für gute Räume. Klassifikation mit Galois-Korrespondenz (mit und ohne Basispunkte). Decktransformationen und eigentlich-diskontinuierliche Wirkungen, $\pi_1(\mathbb{P}^n_\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2$

- Zellzerlegungen: CW-Komplexe, z.B. S^n, $\mathbb{P}^n_I R$, $\mathbb{P}^n_\mathbb{C}$, simpliziale Komplexe
- Klassifikation kompakter Flächen (Triangulierbarkeit nur zitiert)

- kompakt-offen Topologie auf Y^X, z.B. Supremumstopologie für X kompakt, Y metrisch
- $[\Sigma X, Y]_* = [X, \Omega Y]_*$
- $\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]_* = \pi_{n-1}(\Omega_X)$, z.B. $\pi_n(\tilde{X}) \cong \pi_n(X)$ für ÜL $\tilde{X} \to X$ und $n > 1$
- $\pi_n(X, A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}), (X, A)]_* = [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$
- lange exakte Homotopiefolge eines Tripels
- lange exakte Folge einer Faserung, z.B. für Hopf-Faserung $S^3 \to S^2$ mit Faser S^1, damit $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$
- Suspensionseigenschaft, $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $\pi_{<n}(S^n) = 0$, damit Invarianz der Dimension

Literatur

J.F. Davis, Lecture Notes in Algebraic Topology (AMS 2001)
L. Gillman, M. Jerison, Rings of continuous functions, (Springer GTM 43)
A. Hatcher, Algebraic Topology (CUP), `www.math.cornell.edu/~hatcher`
J.R. Munkres (1), Topology (Prentice-Hall, new edition 2000)
J.R. Munkres (2), Elementary Differential Topology (Princeton UP, 1963)
J. Nagata, Modern General Topology (Northholland 1985)
E.H. Spanier, Algebraic Topology (Springer 1990, McGraw-Hill 1966)
L.A. Steen, J.A. Seebach, Counterexamples in Topology, (Dover 1995)
T. tom Dieck, Topologie (Gruyter 2000)

Mengentheoretische Topologie

Munkres (1): Eine sehr gut lesbare und zeitgemäße Einführung zur Topologie. Behandelt u.a. diverse Metrisierungssätze, Baire-Räume und vergleicht in Kapitel 7 verschiedene Topologien auf $C(X, Y)$. Der Jordansche Kurvensatz (mit Verallgemeinerungen steht in Kapitel 10.
Steen/Seebach: Amüsante Pathologiesammlung.

Ringe stetiger Funktionen

Gillman-Jerison: Erweiterung von Gelfand-Kolomogorov-Stone für nicht kompakte Räume (dann mit dem Ring der beschränkten stetigen Funktionen)
Nagata: außer den Funktionenringen auch Familien von Kompaktifizierungen, einschließlich 1-Punkt und Stone-Čech.

Fundamentalgruppe, Überlagerungen

Hatcher: (Kapitel 1) Empfohlen, da gut als Einführung und frei erhältlich. Hatcher macht auch Seifert/van Kampen und Beziehungen zu Graphen und freien Gruppen.
Spanier: Allgemeinerer Zugang, statt Überlagerungen werden Faserungen mit eindeutiger Hebung von Wegen behandelt, korrekte Definition von universeller Überlagerung usw. Kein Beweis von Seifert/van Kampen.
Munkres (1): Auch hier werden Fundamentalgruppen, Seifert-van Kampen und Klassifikation von Überlagerungen behandelt (in Kapiteln 9, 11, 13).

Simpliziale und CW-Komplexe

tom Dieck: Insbesondere Behandlung von simplizialen und CW-Komplexen.
Hatcher: Behandelt CW-Komplexe von Anfang an, Darstellung ist sehr geometrisch. Anstelle von simplizialen Komplexen wird eine Verallgemeinerung (Δ-Komplexe) eingeführt, die weniger Zellen erlaubt.
Munkres (1): Sorgfältiger Beweis der Flächenklassifikation in Kapitel 12.
Munkres (2): Beweise der Triangulierbarkeit glatter Mannigfaltigkeiten.

Homotopietheorie

Hatcher: (Kapitel 4), moderner Standpunkt (CW-Approximation früh), enthält Whitehead, Hurewicz usw. bis Brown-Darstellbarkeit.
Davis: Weitergehend, bringt auch Spektra.
Spanier: Das ist das klassische Buch — gut, aber älter und auch fortgechritten.

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 1

Abgabe bis zum Freitag, den 28. April 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

1.1. Man vergleiche die folgenden neun Topologien auf der reellen Geraden $\mathbb{R}$.

$\tau_1 =$ diskrete Topologie
$\tau_2 =$ anti-diskrete Topologie
$\tau_3 =$ euklidische Topologie
$\tau_4 =$ die von allen Intervallen (a, b) erzeugte Topologie
$\tau_5 =$ die von allen Intervallen $[a, b)$ erzeugte Topologie (*Sorgenfrey-Linie*)
$\tau_6 =$ die von allen Intervallen $[a, b]$ erzeugte Topologie
$\tau_7 =$ kofinite Topologie
$\tau_8 =$ koabzählbare Topologie
$\tau_9 = \{\mathbb{R} \setminus A \,:\, \#A < \infty\} \cup \{B \subset \mathbb{R} \,:\, 0 \notin B\}$

Weiterhin gebe man für jede dieser Topologien an, welchen Abzählbarkeitsaxiomen sie genügt und berechne den Abschluss $\overline{(0, 1)}$.

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie $\overline{A} = \overline{A}^{\text{seq}}$ für alle $A \subset \mathbb{R}$ in $(\mathbb{R}, \tau_9)$.

1.2. Man zeige, dass ein metrischer Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt genau dann, wenn er separabel ist, d.h. eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Gibt es einen separablen topologischen Raum, der dem ersten, aber nicht dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt?

1.3. Beweisen Sie, dass die reelle Gerade $\mathbb{R}$ und das offene Intervall $(0, 1)$ (beide mit der euklidischen Topologie versehen) homöomorph sind, $\mathbb{R}$ und $[0, 1]$ dagegen nicht. Was ist mit $\mathbb{R}$ und $[0, 1)$?

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 2

Abgabe bis zum Freitag, den 5. Mai 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

2.1. Welchen Trennungsaxiomen (T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) genügen die topologischen Räume aus Aufgabe 1?

Zusatzaufgabe: Man zeige, dass das Quadrat $S \times S$ der Sorgenfrey-Linie S nicht T_4 ist.

2.2. Führen Sie aus, dass die n-Sphäre S^n eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit ist.

2.3. Geben Sie explizite Homöomorphismen zwischen den folgenden drei topologischen Räumen an!

$X_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 = 1\}$ mit der induzierten Topologie
$X_2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der Faktortopologie von der Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 \to X_2$
$X_3 := S^1 \times S^1$ mit der Produkttopologie

Dieser topologische Raum heißt 2-*Torus* T^2. Er ist eine glatte Mannigfaltigkeit, wie die Beschreibung $T^2 \cong X_3$ zeigt. Wie viele Karten braucht man mindestens?

Vorlesung:	Mittwoch 10-12 im Raum 032, Freitag 10-12 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	David Ploog `ploog@math.fu-berlin.de` 838-75427 Arnimallee 3, Raum 115
Tutorien:	Mittwoch 12-14 im Raum 210 (Arnimallee 3), Freitag 8-10 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	Martin Götze `mail@almartini.de`

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 3

Abgabe bis zum Freitag, den 12. Mai 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

3.1. Zeigen Sie, dass ein kompakter Hausdorff-Raum automatisch normal ist.

3.2. Wir betrachten die Matrizengruppen

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n) &= \{A \in M(n, \mathbb{R}) \;:\; \det(A) \neq 0\}, \\ \mathrm{SO}(n) &= \{A \in M(n, \mathbb{R}) \;:\; AA^t = \mathrm{id},\ \det(A) = 1\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:
$\mathrm{GL}(n)$ ist weder zusammenhängend noch kompakt.
$\mathrm{SO}(n)$ ist zusammenhängend und kompakt.

Zusatzaufgabe: $\mathrm{SL}(2) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \;:\; \det(A) = 1\}$ ist zusammenhängend und nicht kompakt.

3.3. Man zeige, dass eine topologische Mannigfaltigkeit M genau dann zusammenhängend ist, wenn je zwei Punkte in einer gemeinsamen Karte liegen (das heißt, zu beliebigen Punkten $x, y \in M$ gibt es eine offene Menge $U \subset M$ mit $x, y \in M$, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist).
Man gebe einen lokal euklidischen topologischen Raum an, für den diese Aussage falsch ist.

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 4

Abgabe bis zum Freitag, den 19. Mai 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

4.1. Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, ferner X und Y Hausdorff und lokal kompakt mit abzählbaren Basen. Man zeige, dass

$$f \text{ eigentlich} \iff f \text{ ist abgeschlossen mit kompakten Fasern.}$$

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie außerdem die folgende Äquivalenz

$$f \text{ eigentlich} \iff f \text{ universell abgeschlossen},$$

dabei heißt f *universell abgeschlossen*, wenn für alle lokal kompakten Hausdorff-Räume Z die Abbildungen $f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$ abgeschlossen sind.

4.2. Man zeige $\mathbb{R}P^n \cong \mathrm{O}(n+1)/(\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(1))$.

4.3. Wir betrachten hier die Kleinsche Flasche K und die reell-projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$. Weiter sei $R := \{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 \leq |z| \leq 2\}$ abgeschlossener Kreisring mit den antipodalen Identifizierungsabbildungen $\alpha(z) = -z$ für $|z| = 1$ sowie $\beta(z) = -z$ für $|z| = 2$. Zeigen Sie die Homöomorphien: $K \cong R/_{\alpha,\beta} \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 5

Abgabe bis zum Freitag, den 26. Mai 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

5.1. Sei A ein kommutativer Ring mit 1. Wir betrachten die Menge $\mathrm{Spec}(A)$ aller Primideale von A mit der Zariski-Topologie, und auch die Teilmenge $\mathrm{Max}(A)$ aller Maximalideale mit der induzierten Topologie.

(a) Vergleichen Sie die folgenden acht topologischen Räume
$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathrm{Spec}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Max}(\mathbb{R}[x])$, $\mathrm{Max}(\mathbb{C}[x])$, $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x])$, $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$.

(b) $\mathrm{Spec}(A)$ ist stets T_0, aber im allgemeinen nicht T_1;
$\mathrm{Max}(A)$ ist stets T_1, aber im allgemeinen nicht T_2.

Zusatzaufgabe: Es sei $S := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \ : \ x = y = 0 \text{ oder } x = 1/n, y \neq 0\}$ und $\pi : S \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$. Weiterhin sei $E := (\mathbb{R}, \tau_\pi)$ die Menge der reellen Zahlen, versehen mit der Quotiententopologie von π. Zeigen Sie, dass E Hausdorff, aber nicht regulär ist und dass es einen Ringisomorphismus $C(E) \cong C(\mathbb{R})$ gibt.

5.2. Wir betrachten die folgenden zwei topologischen Räume:

$$X = S^2 \vee S^1 := (S^2 \amalg S^1)/\{N, N'\} \quad (\text{mit Punkten } N \in S^2,\ N' \in S^1),$$
$$Y = S^2 \cup \{0\}\times\{0\}\times[-1,1] \subset \mathbb{R}^3.$$

X besteht also aus den in einem Punkt zusammengeklebten Sphären S^2 und S^1; Y ist eine 2-Sphäre zusammen mit einem Durchmesser. Man beweise, dass X und Y homotopieäquivalent, aber nicht homöomorph sind.

5.3. Es sei $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ das abgeschlossene Einheitsintervall und

$$K := I\times\{0\} \cup \{0\}\times I \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{1/n\}\times I \subset I^2$$

der Kamm. Man zeige:

(a) $A = \{(0,1)\}$ ist Deformationsretrakt von K, aber kein starker.

(b) $K \subset I^2$ ist schwacher Deformationsretrakt, aber kein Deformationsretrakt.

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 6

Abgabe bis zum Freitag, den 2. Juni 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

6.1. Man bestimme den Index für die Schleifen $\alpha_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$ und für $\iota : S^1 \to S^1$, $z \mapsto -z$.

6.2. Zu jeder Zeit gibt es einen Punkt auf der Erde, dessen Temperatur und Druck mit Temperatur und Druck am entgegengesetzten Punkt übereinstimmen. Gilt eine analoge Aussage auch für Zylinder $S^1 \times I$ oder Torus $S^1 \times S^1$?

6.3. Es sei M das Möbiusband mit Rand $\partial M \cong S^1$. Zeigen Sie, dass es keine Retraktion von M auf ∂M gibt, obwohl M und S^1 homotopieäquivalent sind.

6.4. Es seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig, $x_0, x_1 \in X$ und $h \in \Omega(X, x_0, x_1)$ ein Weg in X von x_0 nach x_1. Beweisen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\beta_h"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_1(X, x_1) \arrow[d, "f_*"'] \\
\pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[r, "\beta_{fh}"] & \pi_1(Y, f(x_1))
\end{tikzcd}$$

Vorlesung:	Mittwoch 10-12 im Raum 032, Freitag 10-12 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	David Ploog `ploog@math.fu-berlin.de` 838-75427 Arnimallee 3, Raum 115
Tutorien:	Mittwoch 12-14 im Raum 210 (Arnimallee 3), Freitag 8-10 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	Martin Götze `mail@almartini.de`

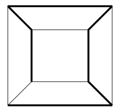
Die Aufgaben liegen auch unter `www.mathematik.hu-berlin.de/~ploog/`.

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 7

Abgabe bis zum Mittwoch, den 14. Juni 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

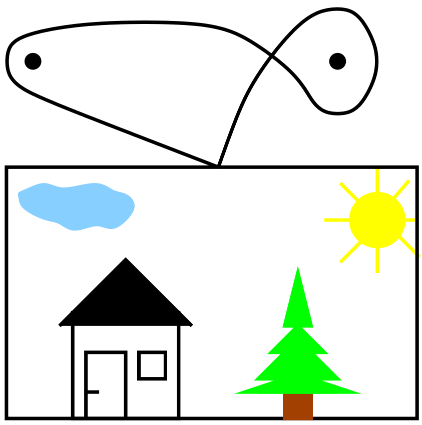
7.1. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(T^2 \# T^2)$ der kompakten Fläche mit zwei Henkeln.

7.2. Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ der nebenstehende Graph. Beweisen Sie, dass die Fundamentalgruppe von G eine freie Gruppe mit fünf Erzeugern ist: $\pi_1(G) = F_5$.



Zusatzaufgabe: Für einen beliebigen zusammenhängenden Graphen G mit maximalem Baum $T \subset G$ beweise man, dass $\pi_1(G)$ isomorph zur der freien Gruppe ist, die von denjenigen G-Kanten erzeugt wird, die nicht in T sind.

7.3. Man hänge ein Gemälde an einer Wand mit n Nägeln so auf, dass man nach Entfernen eines beliebigen Nagels das Bild mitnehmen kann, ohne die Schnur zu lösen.



Zusatzaufgabe: Das folgende Beispiel zeigt, dass man im Satz von Seifert/van Kampen nicht auf die Offenheit der überdeckenden Teilmengen verzichten kann. Es zeigt auch, dass im allgemeinen nicht $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ gilt.
Sei $C_n \subset \mathbb{R}^2$ der Kreis mit Radius $1/n$ und Mittelpunkt $(1/n, 0)$ sowie $X := \bigcup_n C_n$ die Vereinigung aller dieser Kreise; weiter $Y := \{\overline{pq} \,:\, p = (0,0,1), q \in X \times \{0\}\}$ der Kegel in $\mathbb{R}^3$ mit Spitze $(0,0,1)$ über X. Schließlich sei noch $Y' := -Y$ die Spiegelung von Y am Ursprung. Beweisen Sie, dass Y, Y' und $Y \cap Y'$ kontrahierbar sind, aber $\pi_1(Y \cup Y') \neq 1$ gilt.

Vorlesung:	Mittwoch 10-12 im Raum 032, Freitag 10-12 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	David Ploog `ploog@math.fu-berlin.de` 838-75427 Arnimallee 3, Raum 115
Tutorien:	Mittwoch 12-14 im Raum 210 (Arnimallee 3), Freitag 8-10 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	Martin Götze `mail@almartini.de`

Die Aufgaben liegen auch unter `www.mathematik.hu-berlin.de/~ploog/`.

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 8

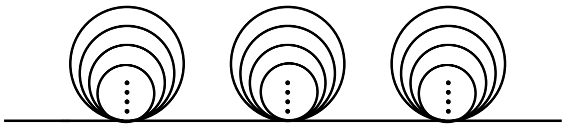
Abgabe bis zum Mittwoch, den 21. Juni 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

8.1. Zeigen Sie, dass jede zusammenhängende Überlagerung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine differenzierbare Mannigfaltigkeit wird, so dass die Projektion glatt ist.

8.2. Geben Sie mittels 2-orientierbarer Graphen alle 3-blättrigen Überlagerungen von $X = S^1 \vee S^1$ an.

8.3. Finden Sie eine einfach-zusammenhängende Überlagerung von $X = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 + 1 \text{ oder } x = y = 0, z \in [-1, 1]\}$, das ist eine Sphäre S^2 mit einem Durchmesser.

Zusatzaufgabe: Es sei $C_n \subset \mathbb{R}^2$ der Kreis mit Radius $1/n$ und Mittelpunkt $(1/n, 0)$ sowie $X := \bigcup_n C_n$ die Vereinigung aller dieser Kreise. Weiterhin sei $\tilde{X} := (\mathbb{R} \amalg \coprod_{n\in\mathbb{Z}} X_n)/A$ mit $(X_n, 0_n) := (X, 0)$ und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{n \in \mathbb{R}, 0_n \in X_n\}$. $p : \tilde{X} \to X$ ist eine Überlagerung mit unendlich vielen Blättern. Finden Sie eine 2-blättrige Überlagerung $q : Y \to \tilde{X}$, so dass $pq : Y \to X$ keine Überlagerung ist. (Damit bilden die topologischen Räume mit Überlagerungen keine Kategorie. Surjektive Abbildungen mit eindeutiger Homotopieliftung (oder auch endliche Überlagerungen) bleiben aber unter Komposition erhalten.)



Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 9

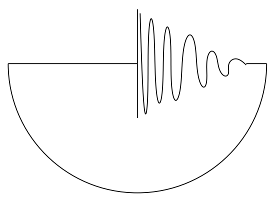
Abgabe bis zum Mittwoch, den 21. Juni 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

9.1. Es sei G eine zusammenhängende topologische Gruppe, für die eine einfach-zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \to G$ existiert. Zeigen Sie, dass $\tilde{X}$ eine kanonische Gruppenstruktur hat und dass p so zu einem Homomorphismus von topologischen Gruppen wird.

9.2. Für einen zusammenhängenden, lokal bogenzusammenhängenden sowie semi-lokal einfach-zusammenhängenden topologischen Raum X mit Basispunkt x_0 sei $u(X, x_0)$ die einfach-zusammenhängende Überlagerung von X. Gibt eine stetige Abbildung $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ zwischen solchen Räumen immer eine stetige Abbildung $u(X, x_0) \to u(Y, y_0)$?
Mit welchen der folgenden Operationen ist $u(X, x_0)$ verträglich: Produkt $X \times Y$, 1-Punkt-Vereinigung $X \vee Y$, 1-Punkt-Kompaktifizierung $\hat{X}$?

Zusatzaufgabe: Es sei $Y := Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4 \cup Y_5 \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung von

$$Y_1 := \{(x, y) \, : \, x^2 + y^2 = 2, y < 0\},$$
$$Y_2 := [-2, 0] \times \{0\},$$
$$Y_3 := \{0\} \times [-1, 1],$$
$$Y_4 := \{(x, \sin(\pi/x)) \, : \, 0 < x < 1\},$$
$$Y_5 := [1, 2] \times \{0\}.$$



Finden Sie eine Abbildung $Y \to S^1$, die keinen (stetigen) Lift für die Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$ hat. Dieses Beispiel zeigt, dass lokaler Bogenzusammenhang für die Existenz von Liftungen notwendig ist.

Vorlesung:	Mittwoch 10-12 im Raum 032, Freitag 10-12 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	David Ploog `ploog@math.fu-berlin.de` 838-75427 Arnimallee 3, Raum 115
Tutorien:	Mittwoch 12-14 im Raum 210 (Arnimallee 3), Freitag 8-10 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	Martin Götze `mail@almartini.de`

Die Aufgaben liegen auch unter `www.mathematik.hu-berlin.de/~ploog/`.

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 10

Abgabe bis zum Mittwoch, den 28. Juni 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

10.1. Finden Sie eine Überlagerung $Y \to S^1 \vee S^1$ derart, dass $G(Y/S^1 \vee S^1) = S_3$, d.h. dass die Decktransformationsgruppe isomorph zur Permutationsgruppe von drei Buchstaben ist.
Gibt es auch Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ mit Decktransformationsgruppe S_n?

10.2. Für eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ wählen wir Basispunkte $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ und betrachten Wirkungen der Fundamentalgruppe von X auf der Faser von p:

$$\begin{aligned}\mu, \rho : \pi_1(X, x_0) \times p^{-1}(x_0) &\to p^{-1}(x_0),\\ ([\gamma], \tilde{x}) &\mapsto \tilde{\gamma}_1(1), \qquad \text{(Monodromiedarstellung)}\\ ([\gamma], \tilde{x}) &\mapsto f(\tilde{x}), \qquad \text{(Decktransformationsdarstellung)}\end{aligned}$$

dabei seien $\tilde{\gamma}_1 : (I, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x})$ und $\tilde{\gamma}_2 : (I, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ die eindeutigen Lifte von γ und $f : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$ die eindeutige Decktransformation mit $f(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_2(1)$. Beweisen Sie an einem Beispiel, dass μ und ρ nicht übereinstimmen müssen.
Zusatzaufgabe: Zeigen Sie $\mu = \rho \iff \pi_1(X, x_0)$ ist abelsch.

10.3. Der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ mit $ijk = -1$ und $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ hat auch eine Matrizendarstellung durch

$$\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \{q = \left(\begin{smallmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{smallmatrix}\right) \in M(2, \mathbb{C})\}, \quad 1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ i \mapsto \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right),\ j \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ k \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Wir betrachten die Gruppe $\mathbb{H}_1$ der Quaternionen mit Determinante 1 sowie den Vektorraum V der rein-imaginären Quaternionen

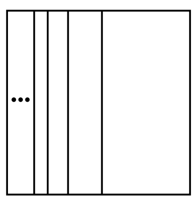
$$\begin{aligned}\mathbb{H}_1 &:= \{q \in \mathbb{H} \ : \ \det(q) = 1\} \cong \mathrm{SU}(2) \cong S^3\\ V &:= \{q \in \mathbb{H} \ : \ \mathrm{tr}(q) = 0\} \cong \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k \cong \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Die Wirkung $\mathbb{H}_1 \times V \to V$, $(q, r) \mapsto qrq^{-1}$ entspricht somit einer Darstellung

$$\pi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3).$$

Zeigen Sie, dass π eine 2-blättrige Überlagerung ist.

Zusatzaufgabe: Wir betrachten den topologischen Raum $X := I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I \cup \bigcup_{n \geq 0} \{1/n\} \times I \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass zu jeder Überlagerung $p : Y \to X$ eine offene Umgebung $U = U(\{0\} \times I)$ des linken Randes existiert, so dass $p|_{p^{-1}}(U)$ ein Homöomorphismus ist.
Somit besitzt X keine einfach-zusammenhängende Überlagerung.



Vorlesung:	Mittwoch 10-12 im Raum 032, Freitag 10-12 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	David Ploog ploog@math.fu-berlin.de 838-75427 Arnimallee 3, Raum 115
Tutorien:	Mittwoch 12-14 im Raum 210 (Arnimallee 3), Freitag 8-10 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	Martin Götze mail@almartini.de

Die Aufgaben liegen auch unter www.mathematik.hu-berlin.de/~ploog/.

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 11

Abgabe bis zum Mittwoch, den 4. Juli 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

11.1. Geben Sie eine CW-Darstellung für die Fläche $T^2 \# T^2$ an.

11.2. Es seien X und Y zwei CW-Komplexe und $A \subset X$ ein Teilkomplex sowie $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ zwei 0-Zellen. Zeigen Sie:

(a) Die Zusammenziehung X/A von A ist wieder ein CW-Komplex.
(b) Die 1-Punkt-Vereinigung $X \vee Y$ in x_0 und y_0 ist wieder ein CW-Komplex.

11.3. Es sei X ein CW-Komplex und $x_0 \in X$ eine 0-Zelle. Beweisen Sie, dass die Fundamentalgruppe von X bereits durch das 2-Skelett $X^{(2)}$ bestimmt ist: $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X^{(2)}, x_0)$.
(Tipp: Zeigen Sie mit dem Satz von Seifert/van Kampen die Invarianz der Fundamentalgruppen, wenn an einen beliebigen topologischen Raum eine n-Zelle mit $n \geq 3$ angeklebt wird.)

Vorlesung:	Mittwoch 10-12 im Raum 032, Freitag 10-12 im Raum 25/26 (π-Gebäude)			
	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Tutorien:	Mittwoch 12-14 im Raum 210 (Arnimallee 3), Freitag 8-10 im Raum 25/26 (π-Gebäude)			
	Martin Götze	mail@almartini.de		

Übungsaufgaben zur Topologie I, Serie 12

Abgabe bis zum Mittwoch, den 11. Juli 2006 um 14 Uhr
in das Tutorenfach B1 (Arnimallee, vor Raum 114)

12.1. Zeigen Sie, dass die zusammenhängende Summe von q reell-projektiven Ebenen $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ durch das Wort $a_1 a_1 \ldots a_q a_q$ beschrieben wird; d.h. homöomorph zu dem topologischen Raum ist, der aus einer 2-Scheibe D^2 durch Verkleben des Randes mittels dieses Wortes entsteht.

12.2. Zeigen Sie $T^2 \# \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \cong K \# \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \# \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \# \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

12.3. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe der nicht-orientierbaren Fläche $N_q = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \# \ldots \# \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie ferner $\pi_1(N_q)_{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z}^{q-1} \oplus \mathbb{Z}/2$.

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Oktaeder-Triangulierung der Sphäre S^2 invariant unter der Antipodenabbildung ist und somit eine CW-Zerlegung von $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = S^2/\pm 1$ gibt. Zeigen Sie weiter, dass die Zellzerlegung keine Triangulierung von $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ ist. Könnnen Sie die Zellzerlegung zu einer Triangulierung verfeinern?

Vorlesung:	Mittwoch 10-12 im Raum 032, Freitag 10-12 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	David Ploog ploog@math.fu-berlin.de 838-75427 Arnimallee 3, Raum 115
Tutorien:	Mittwoch 12-14 im Raum 210 (Arnimallee 3), Freitag 8-10 im Raum 25/26 (π-Gebäude)
	Martin Götze mail@almartini.de

Immatrikulationsnummer: ____

Klausur zur Topologie I

Aufgabe 1. (8 Punkte)
Es seien die folgenden topologischen Räume gegeben:
$X_1 = \{a, b\}$ mit den offenen Mengen $\varnothing, \{a\}, \{a, b\}$
$X_2 = \mathbb{R}$ mit Normtopologie
$X_3 = \mathbb{R}$ mit diskreter Topologie
$X_4 = \mathbb{R}$ mit kofiniter Topologie (abgeschlossene Teilmengen sind endlich oder $\mathbb{R}$)
$X_5 = S^2$ die 2-Sphäre (mit der Standardtopologie)
$X_6 = S^1 \vee S^2$, die 1-Punkt-Summe von 1- und 2-Sphäre
$X_7 = \mathrm{SO}(3)$, die Gruppe aller Drehungen des $\mathbb{R}^3$
$X_8 = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ mit der Topologie von der Supremumsmetrik

Füllen Sie die folgende Tabelle mit 'ja' und 'nein' aus:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_i ist Hausdorff								
X_i hat abzählbare Basis								
X_i ist zusammenhängend								
X_i ist kompakt								
X_i ist kontrahierbar								

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Für einen topologischen Raum sei $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ der Ring der stetigen Funktionen. Beantworten Sie die folgenden Fragen mit 'ja'/'nein':

$X \cong Y$ homöomorph $\implies$ $C(X) \cong C(Y)$? ☐
$X \sim Y$ homotopieäquivalent $\implies$ $C(X) \cong C(Y)$? ☐
$C(X) \cong C(Y)$ $\implies$ $X \cong Y$? ☐
X, Y endliche CW-Komplexe mit $C(X) \cong C(Y)$ $\implies$ $X \cong Y$? ☐

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Es sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Beantworten Sie mit 'ja'/'nein':

Besitzt M eine einfach-zusammenhängende Überlagerung? ☐
Besitzt S^2 eine zusammenhängende Überlagerung mit zwei Blättern? ☐
Besitzt $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ eine zusammenhängende Überlagerung mit zwei Blättern? ☐
Besitzt $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ eine zusammenhängende Überlagerung mit drei Blättern? ☐

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Es seien M und N zwei homotopieäquivalente Mannigfaltigkeiten.

M und N haben gleich viele Zusammenhangskomponenten. ☐

M und N haben die gleiche Dimension. ☐

Mit M ist auch N kompakt. ☐

M und N haben die gleichen Fundamentalgruppen. ☐

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Ist in den folgenden Fällen X ein Deformationsretrakt von Y?

$X = S^1$ und $Y = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < 2\}$? ☐

$X = S^1$ und $Y =$ Möbiusband? ☐

$X = S^1$ und $Y = S^1 \times S^1$? ☐

$X = S^1$ und $Y = S^1 \vee S^1$? ☐

Aufgabe 6. (3 Punkte)
Es sei $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge des Hausdorff-Raumes X. Zeigen Sie, dass K abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)
Beschreiben Sie die 1-Punkt-Kompaktifizierung des offenen Intervalls $(0, 1)$, begründen Sie das Resultat.

Aufgabe 8. (4 Punkte)
(a) Geben Sie eine CW-Zerlegung für $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ an.
(b) Geben Sie eine CW-Zerlegung für $S^3 \vee S^3$ an.
(Die Zellen sind als explizite Teilmengen der Räume anzugeben.)

Aufgabe 9. (9 Punkte)
Berechnen Sie die Fundamentalgruppen der folgenden drei Räume:
(a) $X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$.
(b) $X_2 =$ Kleinsche Flasche.
(c) $X_3 = S^3/G$, dabei wirkt der Erzeuger $g \in G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ auf einem Vektor $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$ mittels $g \cdot x := (-x_1, x_0, x_3, -x_2)$.

Aufgabe 10. (4 Punkte)
Geben Sie eine zweiblättrige, zusammenhängende Überlagerung von $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ an. Beschreiben Sie auch die Überlagerungsprojektion.

Aufgabe 11. (4 Punkte)
Gegeben sei ein ebenes 8-Eck, dessen Kanten mittels des Wortes $abcdb^{-1}a^{-1}d^{-1}c^{-1}$ identifiziert werden. Gibt das eine topologische Fläche und, wenn ja, zu welcher Standardfläche ist sie homöomorph?

Aufgabe 12. (4 Punkte)
Die komplexe Exponentialfunktion ist eine differenzierbare, surjektive Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Erläutern Sie, warum es keine stetige Abbildung $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ mit $\exp \circ \log = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$ geben kann.