# Klausur Lineare Algebra I

(Klaus Altmann, FU Berlin, WS 2005/06)

**Teil A:** Multiple Choice – mehrfache richtige Antworten sind möglich!

(1 Punkt pro richtiger Antwort; -1 Punkt pro falscher Antwort; negative Gesamtpunkte werden *nicht* in andere Aufgaben übertragen.)

*Achtung:* Das Wort "falls" meint, daß die angegebene Bedingung *hinreichend* ist, es ist also ein Synonym für "$\Leftarrow$". Die Abkürzung "gdw" meint "genau dann, wenn", also "$\Leftrightarrow$".

FERMAT

**Aufgabe 1.** Sei $a := 17^{35} \in \mathbb{F}_{37}$. Diese Restklasse ist dann gleich zu

- (i) $1$ — ja | nein
- (ii) $-1$ — ja | nein
- (iii) $17$ — ja | nein
- (iv) $\frac{1}{17}$ — ja | nein

*Lösung:* (iv)

DIM

**Aufgabe 2.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $U, V \subseteq \mathbb{K}^5$ zwei dreidimensionale $\mathbb{K}$-Unterräume. Welche Dimensionen sind dann für $U \cap V$ möglich?

- (i) $0$ — ja | nein
- (ii) $1$ — ja | nein
- (iii) $2$ — ja | nein
- (iv) $3$ — ja | nein
- (v) $4$ — ja | nein
- (vi) $5$ — ja | nein
- (vii) das hängt von $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ab. — ja | nein

Die Dimension von $U + V$

- (viii) ist durch $\dim(U \cap V)$ genau bestimmt — ja | nein
- (ix) ist unabhängig von $\dim(U \cap V)$ — ja | nein

*Lösung:* (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (viii)

RANK

**Aufgabe 3.** Sei $A$ eine $(2 \times 3)$-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Welche Werte sind für $\operatorname{rank} A$ möglich?

- (i) $0$ — ja | nein

(ii) 1 ja nein

(iii) 2 ja nein

(iv) 3 ja nein

(v) 4 ja nein

(vi) 5 ja nein

(vii) das hängt von $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ab. ja nein

*Lösung:* (i), (ii), (iii)

UNAB

**Aufgabe 4.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $C_1 := \{(1, 2), (1, 2)\} \subseteq \mathbb{K}^2$. Dann ist die Menge $C_1$

(i) garantiert linear abhängig ja nein

(ii) garantiert linear unabhängig ja nein

(iii) das hängt von $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ab. ja nein

Sei $C_2 := \{(1, 1), (2, 0), (0, 2)\} \subseteq \mathbb{K}^2$. Dann ist die Menge $C_2$

(iv) garantiert linear abhängig ja nein

(v) garantiert linear unabhängig ja nein

(vi) das hängt von $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ab. ja nein

*Lösung:* (iii), (iv)

KOMP

**Aufgabe 5.** Sei $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Dann ist $U$ komplementär zu $V \subseteq \mathbb{R}^4$ mit

(i) $V = 0$ ja nein

(ii) $V = \mathbb{R}^4$ ja nein

(iii) $V = \operatorname{span}\{(1, 1, 1, 1)\}$ ja nein

(iv) $V = \operatorname{span}\{(1, 1, 2, 2)\}$ ja nein

(v) $V = \operatorname{span}\{(1, 1, -1, -1)\}$ ja nein

(vi) $V = \operatorname{span}\{(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2)\}$ ja nein

(vii) $V = \operatorname{span}\{(1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1)\}$ ja nein

*Lösung:* (iii), (iv), (vi)

PAWEL10

## Teil B: 8 Punkte pro Aufgabe

**Aufgabe 6.** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $v, w \in V$ zwei *verschiedene* Vektoren. Man zeige, daß es dann ein $f \in V^*$ gibt mit $f(v) \neq f(w)$.
Man zeige an einem Beispiel, daß die entsprechende Aussage für Moduln über einem beliebigen Ring nicht mehr wahr sein muß.

*Lösung:* $v - w$ kann als Teil einer Basis gewählt werden, und dann kann man $(v - w) \mapsto 1$ linear fortsetzen.

SET

0 und 1 aus dem $\mathbb{Z}$-Modul $M := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lassen sich nicht trennen.

**Aufgabe 7.** Wieviele Elemente hat ein 4-dimensionaler $\mathbb{F}^3$-Vektorraum?

POL

*Lösung:* 81.

**Aufgabe 8.** Sei $V := \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq 2$; sei $\psi : V \to \mathbb{K}^2$ die Abbildung $p(x) \mapsto (p(1), p'(1))$. Für die geordneten Basen $B := \{1,\, x-1,\, (x-1)^2\}$ von $V$ und $K := \{(1,0),\, (0,1)\}$ von $\mathbb{K}^2$ berechne man die Matrix $M_{KB}(\psi)$.
Für $C := \{1,\, x+1,\, (x+1)^2\} \subseteq V$ berechne man die Basiswechselmatrix $M_{BC}$. Man errechne daraus dann $M_{KC}(\psi)$.

*Lösung:* $M_{KB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; wegen $(x+1)^2 = (x-1)^2 + 4(x-1) + 4$ gilt $M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
und schließlich ist $M_{KC}(\psi) = M_{KB}(\psi) M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

GERADE

**Aufgabe 9.** Unter welchen Bedingungen besitzt ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ einen Unterraum $U \subseteq V$ mit $\dim U = \dim V/U$?

HOM

*Lösung:* $2 | \dim V$.

**Aufgabe 10.** a) Man gebe eine nicht-triviale, $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ an.

b) Man gebe eine nicht-triviale, $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{Q}^3/(1,2,3) \cdot \mathbb{Q}$ an.

c) Was ist $\dim \ker \psi$?

KOMPLEM

*Lösung:*

**Aufgabe 11.** Seien $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$ und $V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid -x_2 = x_3 = x_4\}$. Man zeige, daß $\mathbb{Q}^4 = U \oplus V$ und zerlege so den Vektor $(2,4,6,8) \in \mathbb{Q}^4$ in seine $U$- und $V$-Komponente. Alternativ gebe man eine allgemeine Zerlegungsformel für einen Vektor $(x, a, b, y)$ an.

*Lösung:* $U \cap V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid -x_2 x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} = 0$. Die Zerlegungsformel folgt nach basiswahl und Invertierung der so gewonnenen $(4 \times 4)$-Matrix. Oder: Aus $(a, b) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}) + (\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2})$ erkennt man leicht $(x, a, b, y) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, ?) + (?, \frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2})$, also $(x, a, b, y) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, y + \frac{a-b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2})$. Insbesondere gilt $(2,4,6,8) = (5,5,5,7) + (-3,-1,1,1)$.

AFFIN

## Teil C: 10 Punkte pro Aufgabe

**Aufgabe 12.** Seien $(\mathbb{B}_1, W_1), (\mathbb{B}_2, W_2) \subseteq (\mathbb{A}, V)$ zwei affine Unterräume, so daß die Unterräume $W_i \subseteq V$ komplementär zueinander sind, d.h. es gilt $W_1 \oplus W_2 = V$. Man zeige, daß sich $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ in genau einem Punkt schneiden.

*Lösung:* Nach Basiswahl ergibt sich ein inhomogenes Gleichungssystem mit regulärer Koeffizientenmatrix.

PAWEL5

**Aufgabe 13.** Sei $f : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ der Endomorphismus $x^i \mapsto x^{i+1}$ $(i \in \mathbb{N})$. Sei $\varphi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$ die Funktion, die jedem Polynom $g(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j x^j$ die Zahl $\varphi(g) := 3a_5 - a_0$ zuordnet. Man zeige, daß $\varphi \in \mathbb{K}[x]^*$ und berechne $f^*(\varphi)$.

*Lösung:* $f^*(\varphi) : \sum_j a_j x^j \mapsto 3a_4$.

QUAD

## Teil Z: Zusatzaufgaben (14 Punkte)

**Aufgabe 14.** Sei $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Wie groß können die Lösungsmengen der Gleichungen $x^2 = a$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sein, wenn $n = p$ oder $n = pq$ mit voneinander verschiedenen Primzahlen $p$ und $q$ ist?

*Lösung:* $n = p \Rightarrow$ 0,1,2; $n = pq \Rightarrow$ 0,1,2,4.