Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 1

Abgabe bis zum Mittwoch, den 25. April 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

1.1 Wir betrachten die folgenden drei Vektoren in der Ebene:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie die Vektoren v_1, v_2, v_3 und $2v_1 + v_2$.
Stellen Sie v_3 als Linearkombination von v_1 und v_2 dar! (Gesucht sind also Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

1.2 Man stelle das Polynom $p(x) = (2x^2 + 3)(x^3 - x^2 + 1)$ in vollständig ausmultiplizierter Form (also ohne Klammerausdrücke) dar. Weiterhin drücke man das Polynom $q(x) = 3x^2 + 4x - 4$ als Produkt linearer Polynome aus. Schließlich gebe man die Ableitungen $p'(x)$ und $q'(x)$ an.

1.3 Die beiden folgenden Ausdrücke sind nach x und y aufzulösen, d.h. geben Sie explizite Formeln für x (bzw. y) in Abhängigkeit von a (bzw. b) an:

$$\frac{a+x}{a-x} = 2a + 1, \qquad\qquad (x+b)^2 - x^2 = b.$$

1.4 Consider the following points in the plane:

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

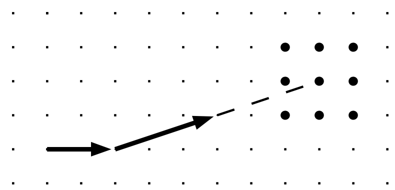
(a) Describe the straight line $\overline{PQ}$ by one equation.
(b) Present the straight line $\overline{RS}$ in parametrised form.
(c) Draw the lines $\overline{PQ}$ and $\overline{RS}$, and compute their intersection.

Vorlesung:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427	Arnimallee 3, Raum 116	
Tutorien:	Christoph Klammt	`klammt@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 032(π),	Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 10-12 031(π),	Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

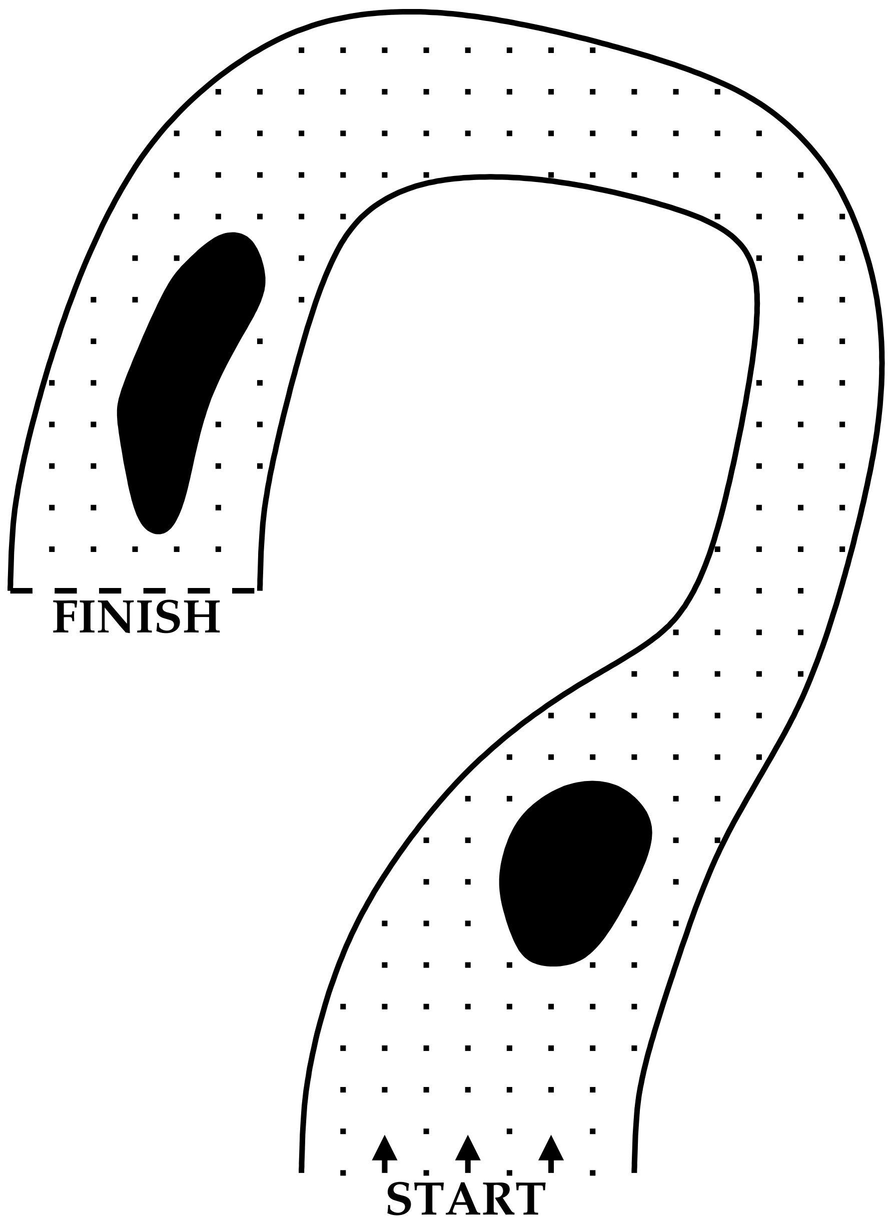
Forum zur Linearen Algebra unter `http://foren.spline.inf.fu-berlin.de/viewforum.php?f=228`

1.5 Die folgende Aufgabe ist informell und ohne Punkte.

Um auf Karopapier Autorennen simulieren, kann man Geschwindigkeiten durch Pfeile zwischen Gitterpunkten darstellen. Ein Zug besteht darin, den vorigen Pfeil am Endpunkt anzutragen und mit einem der neun Vektoren 0 oder $(\pm 1, \pm 1)$ zu addieren. In nebenstehenden Bild sind alle $\bullet$ für den nächsten Zug zulässig.



Was ist die beste Zeit (das sind die wenigsten Züge) für die folgende Rennstrecke?



Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 2

Abgabe bis zum Mittwoch, den 2. Mai 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

2.1 Bringen Sie die folgende Matrix auf reduzierte Stufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.2 Für eine quadratische $n \times n$-Matrix A definieren wir die *Spur* $\mathrm{tr}(A)$ als die Summe der Elemente der Hauptdiagonale, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Man zeige $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ und $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

2.3 Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren (als Spaltenvektoren aufgefasst). Wir betrachten die $n \times n$-Matrix $A = v \cdot w^t$. Zeigen Sie $\mathrm{rk}(A) \leq 1$. Beweisen Sie weiterhin, dass $\mathrm{rk}(A) = 0$ genau dann gilt, wenn $v = 0$ oder $w = 0$ ist.

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass es zu einer $n \times n$-Matrix A vom Rang 1 immer Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $A = v \cdot w^t$.

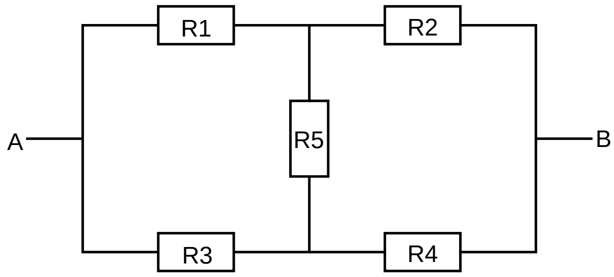
2.4 Prove that addition and multiplication of 2×2 matrices is associative. Also show that addition is commutative. Give an example to show that multiplication is not commutative in general.

Vorlesung:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427	Arnimallee 3, Raum 116	
Tutorien:	Christoph Klammt	`klammt@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 032(π),	Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 10-12 031(π),	Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 3

Abgabe bis zum Mittwoch, den 9. Mai 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

3.1 In dem unten abgebildeten Netzwerk seien die Widerstände $R_1,\ldots,R_5$ bekannt. Drücken Sie den Widerstand R zwischen den Punkten A und B durch die R_i aus!



Benutzen Sie dafür die Stromstärken I_i und Spannungen U_i an den einzelnen Widerständen sowie die Stromstärke I und Spannung U zwischen A und B. Mit diesen Bezeichnungen gelten die untenstehenden Regeln:

$U = RI,$	$U_i = R_i I_i,$		(Ohmsches Gesetz)
$U = U_1 + U_2,$	$U_4 = U_2 + U_5,$	$U_3 = U_1 - U_5$	(Kirchhoffsche Maschenregel)
$I = I_1 + I_3,$	$I_2 = I_1 + I_5,$	$I_3 = I_4 + I_5$	(Kirchhoffsche Knotenregel)

3.2 Invertieren Sie die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

3.3 Für Matrizen $A, B \in M(n, n, \mathbb{R})$ und $C, D \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ zeige man:

$$(A+B)^t = A^t + B^t, \qquad (AB)^t = B^t A^t, \qquad (CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}.$$

Geben Sie Beispiele an für $(AB)^t \neq A^t B^t$ und $(CD)^{-1} \neq C^{-1}D^{-1}$.

3.4 Find all $t \in \mathbb{R}$ such that the set of solutions of the following linear equations is empty.

$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 4 \\ 4x + 2y + z &= t \\ 2x - 2y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Vorlesung:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427 Arnimallee 3, Raum 116	
Tutorien:	Christoph Klammt	klammt@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 032(π), Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 10-12 031(π), Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Forum zur Linearen Algebra unter `http://foren.spline.inf.fu-berlin.de/viewforum.php?f=228`

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 4

Abgabe bis zum Mittwoch, den 16. Mai 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

4.1 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind $\mathbb{R}$-Unterräume?

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \{(x,y,z) \mid 3x - 4y + 2z = 0, x + 2y - z = 0\} \\
U_2 &= \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{Q}\} \\
U_3 &= \{(x,y,z) \mid x \geq 0\} \\
U_4 &= \{(2t+s, s, t-s) \mid s,t \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

4.2 Es seien V und V' zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Unterräumen $U \subsetneq V$ und $U' \subsetneq V'$. Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraumes $\mathrm{Hom}(V,V')$ sind Unterräume?

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \{\varphi : V \to V' \mid \ker(\varphi) \subseteq U\} & \qquad W_3 &= \{\varphi : V \to V' \mid \mathrm{im}(\varphi) \subseteq U'\} \\
W_2 &= \{\varphi : V \to V' \mid \ker(\varphi) \supseteq U\} & \qquad W_4 &= \{\varphi : V \to V' \mid \mathrm{im}(\varphi) \supseteq U'\}
\end{aligned}
$$

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie $W_2 = \{\varphi : V \to V' \text{ mit } \varphi|_U = 0\}$.

4.3 Wir identifizieren den Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen mit $\mathbb{R}^4$ vermöge

$$M(2,2,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^4, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}).$$

Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist und stellen Sie sie mit obiger Identifizierung als 4×4-Matrix dar:

$$\psi : M(2,2,\mathbb{R}) \to M(2,2,\mathbb{R}), \quad A \mapsto A - A^t + \mathrm{tr}(A) \cdot E.$$

4.4 Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$Z := \{A \in M(n,n,\mathbb{R}) \mid AB = BA \text{ für alle } B \in M(n,n,\mathbb{R})\}$$

gleich dem Unterraum $\mathbb{R} = \{\lambda E \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset M(n,n,\mathbb{R})$ ist.

Zusatzaufgabe: Es seien V_1, V_2, V_3 drei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Ist die Abbildung

$$c : \mathrm{Hom}(V_1,V_2) \times \mathrm{Hom}(V_2,V_3) \to \mathrm{Hom}(V_1,V_3), \quad (\alpha,\beta) \mapsto \beta \circ \alpha$$

stets linear? Ist ihr Bild ein Vektorraum?

Vorlesung:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427 Arnimallee 3, Raum 116	
Tutorien:	Christoph Klammt	`klammt@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 032(π), Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 10-12 031(π), Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 5

Abgabe bis zum Mittwoch, den 23. Mai 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

5.1 Zeigen Sie, dass die drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$,

$$v^1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 := \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v^3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Berechnen Sie die Matrix $A \in M(2,3,\mathbb{R})$, die bestimmt ist durch

$$Av^1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Av^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.2 In dem Vektorraum $V = M(2,2,\mathbb{R})$ der reellen 2×2-Matrizen betrachten wir die folgenden drei Teilmengen:

$$S_1 := \{E, A, A^2, A^3\}, \qquad A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right),$$
$$S_2 := \{B, E+B, E+2B\}, \qquad B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right),$$
$$S_3 := \{C, C^t, C^{-1}, C^2, (C^2)^t\} \qquad C = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right).$$

Welche S_i sind frei, Erzeugendensystem oder Basis?

5.3 Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Basis $S \subset V$ und $s_0 \in S$ ein Basiselement. Schließlich seien k weitere Basisvektoren $s_1, \ldots, s_k \in S \setminus \{s_0\}$ und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gewählt. Mit

$$s_0' := s_0 + \lambda_1 s_1 + \cdots \lambda_k s_k$$

zeige man, dass die Menge S', die aus S durch Wegnahme von s_0 und Hinzunahme von s_0' entsteht, wieder eine Basis ist. ($S' := S \cup \{s_0'\} \setminus \{s_0\}$)

5.4 (a) Let $\varphi : V \to W$ be a linear bijective map between $\mathbb{R}$-vector spaces. Prove that φ is actually an isomorphism, i.e. that the inverse map $\varphi^{-1} : W \to V$ is linear.
(b) Suppose that V is an $\mathbb{R}$-vector space of finite dimension and let $\psi : V \to V$ be an injective endomorphism. Show that ψ is already an automorphism of V. Show a similar statement for surjective endomorphisms of V.

Additional exercise: Give examples to show that the assumption $\dim(V) < \infty$ in (b) is necessary, both for injective and for surjective endomorphisms.

Vorlesung:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427 Arnimallee 3, Raum 116	
Tutorien:	Christoph Klammt	`klammt@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 032(π), Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 10-12 031(π), Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Forum zur Linearen Algebra unter `http://foren.spline.inf.fu-berlin.de/viewforum.php?f=228`

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 6

Abgabe bis zum Mittwoch, den 30. Mai 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

6.1 Bestimmen Sie eine Basis des Unterraumes $U := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v^1, v^2, v^3, v^4) \subset \mathbb{R}^4$, wobei $v^1 = (4, 2, 3, 1)$, $v^2 = (2, 1, 2, 1)$, $v^3 = (2, 1, 3, 2)$, $v^4 = (4, 2, 2, 2)$.

6.2 Es sei $V := M(2, 2, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen sowie $U := \{A \in V \mid \mathrm{tr}(A) = 0, A^t = A\}$ der Unterraum der symmetrischen, spurfreien Matrizen. Weiter seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\{A, B, C\} \subset V$ eine linear unabhängige Menge ist, aber dass die Teilmenge (der Restklassen) $\{A, B, C\} \subset V/U$ linear abhängig ist.

Zusatzaufgabe: Bestimmen Sie eine Basis von V/U!

6.3 Sei $V = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der einmal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall. Für fixiertes $x \in [0, 1]$ seien die sieben Abbildungen $\delta_x, \delta'_x, \sigma_x, \sigma'_x, \alpha, \beta, \gamma : V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\delta_x(f) = f(x), \quad \delta'_x(f) = -f'(x), \quad \sigma_x(f) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad \sigma'_x(f) = -\int_0^x f'(t)\,dt,$$

$$\alpha(f) = \int_0^1 t \cdot f'(t)\,dt, \quad \beta(f) = \int_0^1 f(t^2)\,dt, \quad \gamma(f) = \int_0^1 f^2(t)\,dt.$$

Welche davon sind Linearformen auf V, also Elemente von $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$?

Zusatzaufgabe: Geben Sie für diese alle linearen Relationen in V^* an!

6.4 For matrices $B \in M(m, n, \mathbb{R})$ and $A \in M(l, m, \mathbb{R})$, prove the inequalities $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(A)$ and $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(B)$. Provide an example with $l = m = n = 2$ where the inequality is strict.

Vorlesung:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427 Arnimallee 3, Raum 116	
Tutorien:	Christoph Klammt	`klammt@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 032(π), Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 10-12 031(π), Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 7

Abgabe bis zum Mittwoch, den 6. Juni 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

7.1=6.2 Es sei $V := M(2,2,\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen sowie $U := \{A \in V \mid \mathrm{tr}(A) = 0, A^t = A\}$ der Unterraum der symmetrischen, spurfreien Matrizen. Weiter seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\{A,B,C\} \subset V$ eine linear unabhängige Menge ist, aber dass die Teilmenge (der Restklassen) $\{A,B,C\} \subset V/U$ linear abhängig ist.

Zusatzaufgabe: Bestimmen Sie die Dimension von V/U.

7.2 Eine (affine) Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist definiert als das Bild einer Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} a+tb \\ c+td \end{pmatrix}$$

mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und $(b,d) \neq (0,0)$. Zeigen Sie, dass eine solche Gerade auch gegeben ist durch ein Paar $(U, \overline{v})$, wobei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein 1-dimensionaler Unterraum ist und $\overline{v} \in \mathbb{R}^2/U$ ein beliebiges Element.

7.3 Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ induziert eine lineare Abbildung $\varphi^* : W^* \to V^*$ zwischen den Dualräumen und, mit nochmaliger Dualisierung, eine lineare Abbildung $\varphi^{**} : V^{**} \to W^{**}$. Zeigen Sie, dass unter Benutzung der Einbettungen $V \hookrightarrow V^{**}$ und $W \hookrightarrow W^{**}$ die Abbildung φ^{**} eine Fortsetzung von φ ist.

7.4 Let $U_1, U_2 \subset V$ be two subspaces of the $\mathbb{R}$-vector space V. We consider the linear map $\psi : U_2 \to V/U_1$ which is defined as the composition of the inclusion $U_2 \hookrightarrow V$ and the canonical projection $V \twoheadrightarrow V/U_1$. Show the following equivalences:

$$\psi \text{ injective} \iff U_1 \cap U_2 = 0$$
$$\psi \text{ surjective} \iff U_1 + U_2 = V$$

Vorlesung:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 116
Tutorien:	Christoph Klammt	klammt@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 032(π), Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 10-12 031(π), Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de/viewforum.php?f=228

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 8

Abgabe bis zum Mittwoch, den 13. Juni 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

8.1 Wir betrachten die beiden folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \mid 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_4 = 0\},$$
$$U_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{((2,1,2,3)^t, (1,2,-5,3)^t, (3,2,1,5)^t)\}.$$

Berechnen Sie Basen von U_1, U_2 und $U_1 + U_2$.

Zusatzaufgabe: Geben Sie Basen von $\mathbb{R}^4/U_1$ und von $\mathbb{R}^4/U_2$ an.

8.2 Mit $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^4$ aus der vorigen Aufgabe bestimme man Basen von $U_1 \cap U_2$ und von U_1^*.

Zusatzaufgabe: Beschreiben Sie U_2 durch $4 - \dim(U_2)$ lineare Gleichungen.

8.3 Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit dem Unterraum $U \subset V$. Welche der nachstehenden Konstruktionen sind sinnvoll, also tatsächlich Vektorräume?

$$\begin{array}{llll} V^*/U^*, & (V/U)^*, & V/(U^\perp)^*, & V^{**}/V, \\ U^\perp/U^*, & U^*/U^\perp, & V^*/U^\perp, & U^{\perp\perp}/U. \end{array}$$

Zusatzaufgabe: Geben Sie die kanonischen Abbildungen zwischen den Vektorräumen aus der obigen Liste an.

8.4 Let V be an $\mathbb{R}$-vector space of finite dimension and let $U, U' \subset V$ be two subspaces. Prove the dimension formula

$$\dim(U + U') = \dim(U) + \dim(U') - \dim(U \cap U').$$

Vorlesung:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 116
Tutorien:	Christoph Klammt	klammt@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 032(π), Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 10-12 031(π), Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de/viewforum.php?f=228

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 9

Abgabe bis zum Mittwoch, den 20. Juni 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

9.1 Wir betrachten die folgenden zwei Permutationen aus S_5:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man gebe $\tau\sigma$, $\sigma\tau$ und σ^{-1} in Zykeldarstellung an. Außerdem berechne man $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

9.2 Prove the following theorem of Cayley: A finite group G of order n is a subgroup of the permutation group S_n.
(Hint: For fixed $h \in G$, use the bijection $G \to G$, $g \mapsto hg$.)

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe S_n erzeugt wird von der Transposition (12) und einem n-Zykel $(12 \ldots n)$.
(Tipp: Es genügt, alle benachbarte Transpositionen zu erzeugen.)

Zusatzaufgabe: Geben Sie alle mögliche Zykeltypen für S_5 an sowie die Anzahl aller Typenklassen. Wie viele Elemente von S_5 sind Involutionen (d.h. $\sigma^2 = 1$)?

Zusatzaufgabe: Zwei Spieler A und B haben jeder ein gemischtes Kartenspiel aus n paarweise verschiedenen Karten. Sie decken jeweils gleichzeitig eine Karte auf. A gewinnt, wenn dabei einmal zwei identische Karten erscheinen; anderenfalls gewinnt B. Wie hoch sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten für A bzw. B?

9.3 Man bestimme ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$n \equiv 14 \mod 23 \qquad \text{und} \qquad n \equiv 12 \mod 15.$$

9.4 Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ verschieden von 0. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\alpha_{m,n} : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \qquad k \bmod mn \mapsto (k \bmod m, k \bmod n)$$

wohldefiniert ist. Beweisen Sie weiterhin, dass $\alpha_{m,n}$ ein Isomorphismus ist, falls m und n teilerfremd sind.

Vorlesung:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427	Arnimallee 3, Raum 116	
Tutorien:	Christoph Klammt	`klammt@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 032(π),	Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 10-12 031(π),	Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 10

Abgabe bis zum Mittwoch, den 27. Juni 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

10.1 Für die beiden komplexen Zahlen $z = 1 + i$ und $w = -2 + i$ berechne man zw und z/w. Stellen Sie alle vier Zahlen in der Ebene dar.

Zusatzaufgabe: Berechnen Sie $\sqrt{z}$; finden Sie also alle $\xi \in \mathbb{C}$ mit $\xi^2 = z$.

10.2 Lösen Sie das folgende Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_7$:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 2z + 3t &= 2 \\ 3x - y - t &= 3 \\ -x + y - z + 2t &= -2 \\ x + y + z + t &= 0 \end{aligned}$$

10.3 Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente eines endlichen Körpers stets eine Primzahlpotenz ist. (Hinweis: Benutzen Sie den Primkörper!)

Zusatzaufgabe: Wie viele Elemente haben die Menge $M(2, \mathbb{F}_p)$ aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{F}_p$ und die Teilmenge $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ der invertierbaren Matrizen?

10.4 Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[x]$-Moduln dasselbe sind wie Paare (V, φ) aus einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Endomorphismus $\varphi : V \to V$.

Vorlesung:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 116	
Tutorien:	Christoph Klammt	klammt@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 032(π),	Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 10-12 031(π),	Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de/viewforum.php?f=228

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 11

Abgabe bis zum Mittwoch, den 4. Juli 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

11.1 Es bezeichne $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens n. Geben Sie eine Matrixdarstellung der linearen Abbildung

$$\int : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 4}, \qquad x^k \mapsto \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

an. Benutzen Sie dabei ausschließlich Basispolynome maximalen Grades.

11.2 Es sei $V = M(2,2,\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 2×2-Matrizen und $W = \{A \in M(2,2,\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller symmetrischen 2×2-Matrizen. Finden Sie Basen $B \subset V$ und $C \subset W$, so dass die lineare Abbildung

$$\psi : V \to W, \quad A \mapsto A + A^t + \mathrm{tr}(A) \cdot E$$

bezüglich B und C in Standardform ist (dass also die Abbildungsmatrix $M_{CB}(\psi)$ auf der Hauptdiagonalen nur 0 oder 1 hat und sonst 0 ist).

11.3 Es sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus des endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Nach Wahl einer Basis $B \subset V$ definieren wir die Spur von φ als Spur der Abbildungsmatrix: $\mathrm{tr}(\varphi) := \mathrm{tr}(M_{BB}(\varphi))$. Zeigen Sie, dass die Spur wohldefiniert ist (also nicht von der Wahl der Basis abhängt) und eine lineare Abbildung $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to K$ gibt.

11.4 Eine *Projektion* eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes V ist ein Endomorphismus $p : V \to V$ mit $p^2 = p$. Zeigen Sie, dass es zu jedem Unterraum $U \subset V$ eine Projektion $p : V \to V$ mit $p(V) = U$ gibt (man nennt p dann eine *Projektion auf* U). Ist die Projektion eindeutig?

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass eine Projektion diagonalisierbar ist, also eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Was sind die Eigenwerte?

Vorlesung:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 116	
Tutorien:	Christoph Klammt	klammt@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 032(π),	Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 10-12 031(π),	Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de/viewforum.php?f=228

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 12

Abgabe bis zum Mittwoch, den 11. Juli 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

12.1 Berechnen Sie Signatur und Rang der symmetrischen Bilinearform, die durch folgende Matrix gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -8 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

12.2 Bestimmen Sie die affine Normalform der Fläche im $\mathbb{R}^3$, die durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$x_1x_2 - 2x_2x_3 + 3x_1x_3 + x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

Geben Sie den Koordinatenwechsel an.

12.3 Eine symmetrische Bilinearform φ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt *positiv definit*, wenn $\varphi(v,v) > 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$ gilt. Zeigen Sie, dass eine positiv-definite Form immer nicht-ausgeartet ist. Zeigen Sie weiter, dass mit φ auch die Einschränkung $\varphi_U := \varphi|_{U\times U}$ auf einen beliebigen Unterraum $U \subset V$ positiv-definit ist. Geben Sie ein Beispiel für eine nicht-ausgeartete Bilinearform $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einen 1-dimensionalen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^2$, so dass φ_U ausgeartet ist.

12.4 Für einen Unterraum $U \subset V$ wurde $U^\perp$ doppelt definiert: Zum einen als Annulator $U^{\perp_1} := \{f \in V^* \mid f(U) = 0\} \subset V^*$ und andererseits, bei Anwesenheit einer symmetrischen Bilinearform $\varphi : V \times V \to K$ als orthogonales Komplement $U^{\perp_2} := \{v \in V \mid \varphi(v,u) = 0 \,\forall u \in U\} \subset V$.
Zeigen Sie, dass mit der linearen Abbildung $\varphi_I : V \to V^*$ gilt: $\varphi_I^{-1}(U^{\perp_1}) = U^{\perp_2}$.

Zusatzaufgabe: Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension mit einer nicht-ausgearteten symmetrischen oder alternierenden Bilinearform $\varphi : V \times V \to K$. Zeigen Sie, dass $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$ für alle Unterräume $U \subset V$ gilt. Beweisen Sie, dass im alternierenden Fall stets $U = U^\perp$ möglich ist. Für welche symmetrischen Bilinearformen geht das auch?

Vorlesung:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 116
Tutorien:	Christoph Klammt	klammt@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 032(π), Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 10-12 031(π), Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de/viewforum.php?f=228

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 13

Abgabe bis zum Mittwoch, den 18. Juli 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

13.1 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

13.2 Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren für zwei der folgenden drei komplexen Matrizen (für die Lösung auch der dritten Matrix gibt es Zusatzpunkte):

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.3 Berechnen Sie das charakteristische Polynom des Endomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, \quad f \mapsto f(-1) \cdot x^2 + f(1) \cdot x - f'.$$

Zusatzaufgabe: Finden Sie Eigenwerte und -vektoren.

13.4 For a square matrix $A \in \mathrm{M}(n, n, K)$ and $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ the matrix $A_{ij} \in \mathrm{M}(n-1, n-1, K)$ obtained by deleting the i-th row and j-th column from A is called the i, j *minor* of A. We define a new matrix $\mathrm{adj}(A) \in \mathrm{M}(n, n, K)$, the *adjugate Matrix* of A, via

$$(\mathrm{adj} A)_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

Prove two of the following five relations for adjugate matrices (solving more than two will grant bonus points):

(a) $\mathrm{adj}(E) = E$ and $\mathrm{adj}(A)^t = \mathrm{adj}(A^t)$
(b) $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B)\mathrm{adj}(A)$
(c) $\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$
(d) $\mathrm{rk}(A) = n \implies \mathrm{rk}(\mathrm{adj}(A)) = n, \quad \mathrm{rk}(A) = n-1 \implies \mathrm{rk}(\mathrm{adj}(A)) = 1,$ and $\mathrm{rk}(A) \leq n-2 \implies \mathrm{rk}(\mathrm{adj}(A)) = 0$
(e) $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = A$ if $\det(A) = 1,$ and $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)) = 0$ if $\det(A) = 0$

Vorlesung:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427 Arnimallee 3, Raum 116	
Tutorien:	Christoph Klammt	klammt@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 032(π), Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 10-12 031(π), Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 14

Abgabe bis zum Mittwoch, den 25. Juli 2007 um 10 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

Alle Aufgaben dieser Serie sind Zusatzaufgaben!

14.1 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind affine Unterräume?
(a) $\{(1,1)\}$
(b) $\{(x,y) \mid 2x+y=1\}$
(c) $\{(x,y) \mid xy=1\}$
(d) $\{(x,y) \mid x^2=y^2\}$

14.2 Für drei paarweise verschiedene Punkte der Ebene, $P,Q,R \in \mathbb{A}^2$ sei $S = \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R$ der Schwerpunkt des Dreiecks PQR. Zeigen Sie, dass S gleichzeitig der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks ist.

14.3 Für zwei affine Unterräume A, B eines affinen Raumes $\mathbb{A}$ sei $A \vee B$ der kleinste affine Unterraum von $\mathbb{A}$, der $A \cup B$ enthält; $A \vee B$ heißt *Verbindung* (join) von A und B.
Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^3$ affine Geraden. Geben Sie alle Möglichkeiten für $A \vee B$ an.
Was können Sie im allgemeinen über den Trägervektorraum von $A \vee B$ in Termen der Trägervektorräume von A und B sagen?

14.4 Wir betrachten den 4-dimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}^4$ über dem Körper $K = \mathbb{F}_3$. Weiter sei $P \in \mathbb{A}^4$ ein beliebiger fixierter Punkt.
(a) Wie viele affine Geraden gibt es in $\mathbb{A}^4$?
(b) Wie viele dieser Geraden gehen durch P?

Zusatzaufgabe: Wie viele Elemente hat eine Geraden-lose, maximale Teilmenge von $\mathbb{A}^4$?
[Tipp: Dies ist eine sehr schwere kombinatorische Herausforderung. Versuchen Sie einfach, eine möglichst große solche Teilmenge zu finden. Ein SET-Spiel hilft dabei.]

Vorlesung:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 116
Tutorien:	Christoph Klammt	klammt@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 032(π), Do 12-14 119(A3)	(Fach E2)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 10-12 031(π), Mi 10-12 005(T9)	(Fach E3)

Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de/viewforum.php?f=228

Immatrikulationsnummer:

Klausur (Abschluß Lineare Algebra I)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$

Multiple Choice: 1 Punkt pro richtiger Antwort; -1 Punkt pro falscher Antwort; negative Gesamtpunkte werden *nicht* in andere Aufgaben übertragen.

1. (*3 Punkte*) Für welche komplexen Zahlen z gilt $z^3 = -11 + 2i$?

(a) $z = 1 + 2i$ ja nein

(b) $z = 2 + i$ ja nein

(c) $z = 1 - 2i$ ja nein

2. (*3 Punkte*) Für welche Elemente n von $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ gilt $n^3 = 9$?

(a) $n = -7$ ja nein

(b) $n = 5$ ja nein

(c) $n = 4$ ja nein

3. (*4 Punkte*) Gegeben sei die folgende Permutation aus S_9:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 2 & 1 & 9 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Der Zykeltyp von σ ist $(2, 2, 5)$. ja nein

(b) Der Zykeltyp von σ ist $(2, 3, 4)$. ja nein

(c) Der Zykeltyp von σ ist $(3, 3, 3)$. ja nein

(d) Das Signum von σ ist -1. ja nein

4. (*4 Punkte*) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & 1 & z \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar?

(a) $z = 3i$ ja nein

(b) $z = -3i$ ja nein

(c) $z = \frac{i}{3}$ ja nein

(d) $z = \frac{3}{i}$ ja nein

5. (*5 Punkte*) Es seien $U_1, U_2 \subset V$ zwei Unterräume des K-Vektorraumes V. Die Dimensionen seien $\dim(V) = 5$, $\dim(U_1) = 4$, $\dim(U_2) = 3$. Welche Dimensionen sind für den Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ möglich?

(a) 0 ja nein

(b) 1 ja nein

(c) 2 ja nein

(d) 3 ja nein

(e) 4 ja nein

6. (*5 Punkte*) Es sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

(a) $\dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 5$ ja nein

(b) $\dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 4$ ja nein

(c) f ist nicht surjektiv. ja nein

(d) f ist surjektiv. ja nein

(e) Der Kern von f ist nicht trivial (ungleich 0). ja nein

7. (*6 Punkte*) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum sowie $U_1, U_2 \subset V$ zwei Unterräume. Dann gilt stets:

(a) $\dim(V/U_1) \geq \dim(U_1)$ ja nein

(b) $\dim(V/U_1) \geq \dim(V) - \dim(U_1)$ ja nein

(c) $\dim(V/(U_1 + U_2)) \geq \dim(V) - \dim(U_1) - \dim(U_2)$ ja nein

(d) $\dim(V/(U_1 + U_2)) \geq \dim(V/U_1)$ ja nein

(e) $\dim(V/(U_1 \cap U_2)) \geq \dim(V) - \dim(U_1) - \dim(U_2)$ ja nein

(f) $\dim(V/(U_1 \cap U_2)) \geq \dim(V/U_1)$ ja nein

8. (*6 Punkte*) Es sei $\varphi : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Weiterhin seien $S \subset V$ linear unabhängig, $E \subset V$ ein Erzeugendensystem und $B \subset V$ eine Basis. Dann gilt:

(a) $\varphi(S) \subset W$ ist linear unabhängig. ja nein

(b) $\varphi(E) \subset W$ ist ein Erzeugendensystem. ja nein

(c) $\varphi(B) \subset W$ ist eine Basis. ja nein

(d) $\varphi(B) \subset W$ ist linear unabhängig. ja nein

(e) $\varphi(B) \subset W$ ist ein Erzeugendensystem. ja nein

(f) Das hängt davon ab, ob V oder W endlich-dimensional sind. ja nein

9. (*3 Punkte*) Es seien $A, B \in M(n,n,\mathbb{R})$ zwei quadratische Matrizen mit $AB = 0$. Folgt dann bereits $BA = 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

10. (*3 Punkte*) Es sei $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung auf den Dualräumen, $f^* : W^* \to V^*$ dann injektiv ist.

11. (*6 Punkte*) Die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

wird als Abbildung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ aufgefasst. Geben Sie Basen für den Kern und das Bild dieser Abbildung an.

12. (*6 Punkte*) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Berechnen Sie Rang und Signatur der symmetrischen Bilinearform

$$b : V \times V \to \mathbb{R}, \quad b(p,q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ dx.$$

13. (*6 Punkte*) Sei $V = M(2,2,\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen. Berechnen Sie die Determinante des Endomorphismus

$$\varphi : V \to V, \quad A \mapsto A^t - A + \mathrm{tr}(A) \cdot E.$$

Dabei ist A^t die transponierte Matrix zu A, $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A und $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Einheitsmatrix.

14. (*6 Punkte*) Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden komplexen Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. (*6 Punkte*) Wir betrachten die folgenden zwei Unterräume von $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\},$$
$$U_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}((1,1,3),(3,-1,1)).$$

Berechnen Sie Basen für die folgenden Vektorräume:

(i)	U_1	*(1 Punkt)*
(ii)	$\mathbb{R}^3/U_2$	*(2 Punkte)*
(iii)	$U_1 \cap U_2$	*(3 Punkte)*

Klausur (Abschluss Lineare Algebra I)

mit Lösungen

1. (*3 Punkte*) Für welche komplexen Zahlen z gilt $z^3 = -11 + 2i$?

(a)	$z = 1 + 2i$	ja	$\times$
(b)	$z = 2 + i$	ja	$\times$
(c)	$z = 1 - 2i$	$\times$	nein

2. (*3 Punkte*) Für welche Elemente n von $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ gilt $n^3 = 9$?

(a)	$n = -7$	$\times$	nein
(b)	$n = 5$	ja	$\times$
(c)	$n = 4$	$\times$	nein

3. (*4 Punkte*) Gegeben sei die folgende Permutation aus S_9:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 2 & 1 & 9 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a)	Der Zykeltyp von σ ist $(2, 2, 5)$.	ja	$\times$
(b)	Der Zykeltyp von σ ist $(2, 3, 4)$.	$\times$	nein
(c)	Der Zykeltyp von σ ist $(3, 3, 3)$.	ja	$\times$
(d)	Das Signum von σ ist -1.	ja	$\times$

4. (*4 Punkte*) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & i \\ 0 & 1 & z \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar?

(a)	$z = 3i$	$\times$	nein
(b)	$z = -3i$	ja	$\times$
(c)	$z = \frac{i}{3}$	$\times$	nein
(d)	$z = \frac{3}{i}$	ja	$\times$

5. (*5 Punkte*) Es seien $U_1, U_2 \subset V$ zwei Unterräume des K-Vektorraumes V. Die Dimensionen seien $\dim(V) = 5$, $\dim(U_1) = 4$, $\dim(U_2) = 3$. Welche Dimensionen sind für den Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ möglich?

(a)	0	ja	$\times$
(b)	1	ja	$\times$
(c)	2	$\times$	nein

(d)	3	×	nein
(e)	4	ja	×

6. (*5 Punkte*) Es sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

(a)	$\dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 5$	×	nein
(b)	$\dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 4$	ja	×
(c)	f ist nicht surjektiv.	ja	×
(d)	f ist surjektiv.	ja	×
(e)	Der Kern von f ist nicht trivial (ungleich 0).	×	nein

7. (*6 Punkte*) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum sowie $U_1, U_2 \subset V$ zwei Unterräume. Dann gilt stets:

(a)	$\dim(V/U_1) \geq \dim(U_1)$	ja	×
(b)	$\dim(V/U_1) \geq \dim(V) - \dim(U_1)$	×	nein
(c)	$\dim(V/(U_1 + U_2)) \geq \dim(V) - \dim(U_1) - \dim(U_2)$	×	nein
(d)	$\dim(V/(U_1 + U_2)) \geq \dim(V/U_1)$	ja	×
(e)	$\dim(V/(U_1 \cap U_2)) \geq \dim(V) - \dim(U_1) - \dim(U_2)$	×	nein
(f)	$\dim(V/(U_1 \cap U_2)) \geq \dim(V/U_1)$	×	nein

Lösung: $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$; $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$

8. (*6 Punkte*) Es sei $\varphi : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Weiterhin seien $S \subset V$ linear unabhängig, $E \subset V$ ein Erzeugendensystem und $B \subset V$ eine Basis. Dann gilt:

(a)	$\varphi(S) \subset W$ ist linear unabhängig.	ja	×
(b)	$\varphi(E) \subset W$ ist ein Erzeugendensystem.	×	nein
(c)	$\varphi(B) \subset W$ ist eine Basis.	ja	×
(d)	$\varphi(B) \subset W$ ist linear unabhängig.	ja	×
(e)	$\varphi(B) \subset W$ ist ein Erzeugendensystem.	×	nein
(f)	Das hängt davon ab, ob V oder W endlich-dimensional sind.	ja	×

Lösung: Teil (f) ist irreführend formuliert. Bei Antwort 'ja' wurde kein Punkt abgezogen.

9. (*3 Punkte*) Es seien $A, B \in M(n, n, \mathbb{R})$ zwei quadratische Matrizen mit $AB = 0$. Folgt dann bereits $BA = 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Lösung: Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ; man sollte erwarten, dass die Aussage nicht stimmt. Betrachten 2×2-Matrizen: ist einer der Ränge von A oder B gleich 0 (Nullmatrix) oder 2 (invertierbare Matrix), so stimmt die Implikation. Mit beiden Rängen gleich 1 findet man leicht Gegenbeispiele, etwa $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. (*3 Punkte*) Es sei $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung auf den Dualräumen, $f^* : W^* \to V^*$ dann injektiv ist.

Lösung: Das folgt direkt aus der Definition der dualen Abbildung: $f^*(\alpha)(v) = \alpha(f(v))$ für $\alpha \in W^*$. Aus $f^*(\alpha) = 0$ folgt $\alpha \circ f = 0$; d.h. α verschwindet auf dem Bild von f. Wegen der Surjektivität von f muss dann $\alpha = 0$ sein, d.h. f^* ist injektiv.

11. (*6 Punkte*) Die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

wird als Abbildung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ aufgefasst. Geben Sie Basen für den Kern und das Bild dieser Abbildung an.

Lösung: Bestimmung des Kernes mit Gauß-Algorithmus (Zeilenstufenform). Dabei sieht man gleichzeitig, dass $\mathrm{rk}(A) = 2$ (es gibt zwei Stufen). Alle vier Spalten bilden ein Erzeugendensystem des Bildes; eine Basis wird von den Stufenspalten gebildet. (In diesem Fall kann man einfach zwei linear unabhängige Spalten der Matrix A nehmen, also zwei beliebige.)

12. (*6 Punkte*) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Berechnen Sie Rang und Signatur der symmetrischen Bilinearform

$$b : V \times V \to \mathbb{R}, \quad b(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ dx.$$

Lösung: Zunächst müssen wir eine Basis wählen, etwa $P = \{1, x, x^2\} =: \{p_1, p_2, p_3\}$ um damit die Matrix der SBLF zu bestimmen; eine 3×3-Matrix, der (i, j)-Eintrag gegeben ist durch $b(p_i, p_j) = \int_{-1}^{1} x^{i-1}x^{j-1}\ dx = \int_{-1}^{1} x^{i+j-2}\ dx = \frac{x^{i+j-1}}{i+j-1}|_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{i+j-1}}{i+j-1}$, also

$$M_{P^*P}(b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Den Rang kann man jetzt schon ablesen, er ist 3. Ein Schritt mit dem symmetrischen Gauß-Algorithmus bringt die Matrix in Diagonalform mit drei positiven Diagonaleinträgen, die Signatur ist also $3 - 0 = 3$.

13. (*6 Punkte*) Sei $V = M(2, 2, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen. Berechnen Sie die Determinante des Endomorphismus

$$\varphi : V \to V, \quad A \mapsto A^t - A + \mathrm{tr}(A) \cdot E.$$

Dabei ist A^t die transponierte Matrix zu A, $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A und $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Einheitsmatrix.

Lösung: Wieder muss man eine Basis wählen, um die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung φ zu bestimmen. Mit $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ findet man

$$M_{BB}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\det(\varphi) = \det(M_{BB}(\varphi)) = 0$.
Alternative: Der Vektor $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ liegt im Kern von φ, also kann φ kein Isomorphismus sein und es gilt $\det(\varphi) = 0$.

14. (*6 Punkte*) Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden komplexen Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Zunächst ist

$$\chi_B(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & -3 \\ 2 & 1-t & 2 \\ -1 & 3 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 3t^2 + 8t - 30.$$

Ganzzählige Nullstellen sind Teiler des konstanten Terms, also ± 1, ± 3, ± 5 usw. Einsetzen ergibt -3 als Nullstelle, anschließende Polynomdivision führt auf

$$(-t^3 + 3t^2 + 8t - 30) : (t + 3) = -t^2 + 6t - 10$$

und die Nullstellen dieser quadratischen Funktion sind $3 \pm i$. Insgesamt sind die Eigenwerte von B also -3, $3 + i$ und $3 - i$.

15. (*6 Punkte*) Wir betrachten die folgenden zwei Unterräume von $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\},$$
$$U_2 = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}((1, 1, 3), (3, -1, 1)).$$

Berechnen Sie Basen für die folgenden Vektorräume:

(i)	U_1	*(1 Punkt)*
(ii)	$\mathbb{R}^3/U_2$	*(2 Punkte)*
(iii)	$U_1 \cap U_2$	*(3 Punkte)*

Lösung: Basis von U_1 mit Gauß-Algorithmus, z.B. $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$.
Für (ii) ergänzen Basis von U_2 (das Erzeugendsystem $\{(1, 1, 3), (3, -1, 1)\}$ ist schon eine!) durch einen dritten Vektor v zu einer Basis von ganz $\mathbb{R}^3$; z.B. $v = (1, 0, 0)$. Dann ist $\{\overline{v}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3/U_2$. (D.h. der Quotientenraum ist 1-dimensional und die Restklasse von v erzeugt ihn.)
Für (iii) bestimmen lineare Gleichungen, die U_2 beschreiben: suchen $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ mit $a + b + 3c = 0$ und $3a - b + c = 0$; die Lösung (eindeutig bis auf Skalare) ist $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$; das entspricht der Gleichung $x + 2y - z = 0$. Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ist durch das Gleichungssystem mit den zwei Gleichungen $x + y = 0$ und $x + 2y - z = 0$ beschrieben. Somit ist $\{(1, -1, -1)\} \subset U_1 \cap U_2$ eine Basis.

Immatrikulationsnummer: [ ]

Nachklausur (Abschluss Lineare Algebra I)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$

Multiple Choice: 1 Punkt pro richtiger Antwort; -1 Punkt pro falscher Antwort; negative Gesamtpunkte werden *nicht* in andere Aufgaben übertragen.

1. (*3 Punkte*) Beantworten Sie folgende Fragen über die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

(a) Gilt $(3-4i)(2-i) = 2-11i$? ja nein

(b) Gibt es vier komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = 1$? ja nein

(c) Besitzt jede komplexe Zahl eine Quadratwurzel? ja nein

2. (*3 Punkte*) Beantworten Sie die folgenden Fragen über den endlichen Körper $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(a) Gilt $2 \cdot 4 \cdot 6 = 1$ in $\mathbb{F}_7$? ja nein

(b) Gibt es drei Elemente $n \in \mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ mit $n^3 = 1$? ja nein

(c) Existiert für $a \in \mathbb{F}_7$ mit $a \neq 0$ stets $1/a \in \mathbb{F}_7$? ja nein

3. (*4 Punkte*) Bewerten Sie folgende Aussagen über die Permutationsgruppe S_5.

(a) S_5 hat 120 Elemente. ja nein

(b) S_5 hat genau fünf Zykeltypen. ja nein

(c) $(13452)(13)(245) = (1425)$. ja nein

(d) Die Permutation $(124)(35)$ ist gerade. ja nein

4. (*4 Punkte*) Es seien $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Bewerten Sie die folgenden Aussagen.

(a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist surjektiv. ja nein

(b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist injektiv. ja nein

(c) $\mathrm{rk}(A+B) = 2$. ja nein

(d) $\mathrm{rk}(AB) = 2$. ja nein

5. (*5 Punkte*) Es seien $U_1, U_2 \subset V$ zwei Unterräume des K-Vektorraumes V. Die Dimensionen seien $\dim(V) = 6$, $\dim(U_1) = 5$, $\dim(U_2) = 4$. Welche Dimensionen sind für den Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ möglich?

(a)	0	ja	nein
(b)	1	ja	nein
(c)	2	ja	nein
(d)	3	ja	nein
(e)	4	ja	nein

6. (*5 Punkte*) Es seien $f : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen sowie $U_1 \subset V_1$ und $U_2 \subset V_2$ Unterräume. Welche der folgenden Abbildungen werden kanonisch durch f induziert?

(a)	$V_1 \to U_2$	ja	nein
(b)	$U_1 \to V_2$	ja	nein
(c)	$V_1 \to V_2/U_2$	ja	nein
(d)	$V_1/U_1 \to V_2$, falls $U_1 \subseteq \ker(f)$.	ja	nein
(e)	$V_1/U_1 \to V_2$, falls $U_1 \supseteq \ker(f)$.	ja	nein

7. (*6 Punkte*) Es sei $\varphi : V \to W$ eine *injektive* lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen endlicher Dimension. Weiterhin seien $S \subset V$ linear unabhängig, $E \subset V$ ein Erzeugendensystem und $B \subset V$ eine Basis. Dann gilt:

(a)	$\varphi(S) \subset W$ ist linear unabhängig.	ja	nein
(b)	$\varphi(E) \subset W$ ist ein Erzeugendensystem.	ja	nein
(c)	$\varphi(B) \subset W$ ist eine Basis.	ja	nein
(d)	$\varphi(B) \subset W$ ist linear unabhängig.	ja	nein
(e)	$\varphi(B) \subset W$ ist ein Erzeugendensystem.	ja	nein
(f)	$\dim(V) \leq \dim(W)$.	ja	nein

8. (*6 Punkte*) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind affine Unterräume?

(a)	$\{(x,y) \mid x = 0 \text{ und } y = 0\}$	ja	nein
(b)	$\{(x,y) \mid x = 0 \text{ oder } y = 0\}$	ja	nein
(c)	$\{(x,y) \mid xy = 0\}$	ja	nein
(d)	$\{(x,y) \mid x + y = 0\}$	ja	nein
(e)	$\{(x,y) \mid xy = 1\}$	ja	nein
(f)	$\{(x,y) \mid x + y = 1\}$	ja	nein

9. (*3 Punkte*) Es sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare quadratische Matrix und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann $\lambda \neq 0$ gilt und dass $1/\lambda$ Eigenwert von A^{-1} ist.

10. (*3 Punkte*) Für einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum V mit Unterräumen $U_1, U_2 \subset V$ beweise man die Formel

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

11. (*6 Punkte*) Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der geordneten Basis $B = \{(1,0,2), (-1,1,0), (3,2,1)\}$.

(i) Geben Sie die zu B duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ an. *(3 Punkt)*

(ii) Stellen Sie das Funktional $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x - y + 4z$ in der zu B dualen Basis dar. *(3 Punkte)*

12. (*6 Punkte*) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Berechnen Sie Spur und Determinante des Endomorphismus

$$\varphi : V \to V, \qquad p(x) \mapsto p'(x) + p(2) \cdot x^2,$$

wobei $p'(x)$ die Ableitung des Polynoms $p(x)$ bezeichnet.

13. (*6 Punkte*) Sei $W = M_{\text{symm}}(2, \mathbb{R}) := \{A \in M(2,2,\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller symmetrischen 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen. Berechnen Sie Rang und Signatur der symmetrischen Bilinearform

$$b : W \times W \to \mathbb{R}, \qquad b(A,B) = \mathrm{tr}(AB).$$

Für $M \in M(2,2,\mathbb{R})$ bezeichnen M^t die transponierte Matrix und $\mathrm{tr}(M)$ die Spur.

14. (*6 Punkte*) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden komplexen Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. (*6 Punkte*) Wir betrachten die folgenden zwei Unterräume von $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\},$$
$$U_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}((2,3,-4), (1,2,-2)).$$

Berechnen Sie Basen für die folgenden Vektorräume:

(i) U_1 *(1 Punkt)*

(ii) $\mathbb{R}^3/U_2$ *(2 Punkte)*

(iii) $U_1 \cap U_2$ *(3 Punkte)*

Nachklausur (Abschluss Lineare Algebra I)

mit Lösungen

1. (*3 Punkte*) Beantworten Sie folgende Fragen über die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

(a)	Gilt $(3-4i)(2-i) = 2-11i$?	$\times$	nein
(b)	Gibt es vier komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = 1$?	$\times$	nein
(c)	Besitzt jede komplexe Zahl eine Quadratwurzel?	$\times$	nein

2. (*3 Punkte*) Beantworten Sie die folgenden Fragen über den endlichen Körper $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(a)	Gilt $2 \cdot 4 \cdot 6 = 1$ in $\mathbb{F}_7$?	ja	$\times$
(b)	Gibt es drei Elemente $n \in \mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ mit $n^3 = 1$?	$\times$	nein
(c)	Existiert für $a \in \mathbb{F}_7$ mit $a \neq 0$ stets $1/a \in \mathbb{F}_7$?	$\times$	nein

3. (*4 Punkte*) Bewerten Sie folgende Aussagen über die Permutationsgruppe S_5.

(a)	S_5 hat 120 Elemente.	$\times$	nein
(b)	S_5 hat genau fünf Zykeltypen.	ja	$\times$
(c)	$(13452)(13)(245) = (1425)$.	$\times$	nein
(d)	Die Permutation $(124)(35)$ ist gerade.	ja	$\times$

4. (*4 Punkte*) Es seien $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Bewerten Sie die folgenden Aussagen.

(a)	$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist surjektiv.	$\times$	nein
(b)	$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist injektiv.	$\times$	nein
(c)	$\mathrm{rk}(A+B) = 2$.	ja	$\times$
(d)	$\mathrm{rk}(AB) = 2$.	$\times$	nein

5. (*5 Punkte*) Es seien $U_1, U_2 \subset V$ zwei Unterräume des K-Vektorraumes V. Die Dimensionen seien $\dim(V) = 6$, $\dim(U_1) = 5$, $\dim(U_2) = 4$. Welche Dimensionen sind für den Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ möglich?

(a)	0	ja	×
(b)	1	ja	×
(c)	2	ja	×
(d)	3	×	nein
(e)	4	×	nein

6. (*5 Punkte*) Es seien $f : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen sowie $U_1 \subset V_1$ und $U_2 \subset V_2$ Unterräume. Welche der folgenden Abbildungen werden kanonisch durch f induziert?

(a)	$V_1 \to U_2$	ja	×
(b)	$U_1 \to V_2$	×	nein
(c)	$V_1 \to V_2/U_2$	×	nein
(d)	$V_1/U_1 \to V_2$, falls $U_1 \subseteq \ker(f)$.	×	nein
(e)	$V_1/U_1 \to V_2$, falls $U_1 \supseteq \ker(f)$.	ja	×

7. (*6 Punkte*) Es sei $\varphi : V \to W$ eine *injektive* lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen endlicher Dimension. Weiterhin seien $S \subset V$ linear unabhängig, $E \subset V$ ein Erzeugendensystem und $B \subset V$ eine Basis. Dann gilt:

(a)	$\varphi(S) \subset W$ ist linear unabhängig.	×	nein
(b)	$\varphi(E) \subset W$ ist ein Erzeugendensystem.	ja	×
(c)	$\varphi(B) \subset W$ ist eine Basis.	ja	×
(d)	$\varphi(B) \subset W$ ist linear unabhängig.	×	nein
(e)	$\varphi(B) \subset W$ ist ein Erzeugendensystem.	ja	×
(f)	$\dim(V) \leq \dim(W)$.	×	nein

8. (*6 Punkte*) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind affine Unterräume?

(a)	$\{(x, y) \mid x = 0 \text{ und } y = 0\}$	×	nein
(b)	$\{(x, y) \mid x = 0 \text{ oder } y = 0\}$	ja	×
(c)	$\{(x, y) \mid xy = 0\}$	ja	×
(d)	$\{(x, y) \mid x + y = 0\}$	×	nein
(e)	$\{(x, y) \mid xy = 1\}$	ja	×
(f)	$\{(x, y) \mid x + y = 1\}$	×	nein

9. (*3 Punkte*) Es sei $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ eine invertierbare quadratische Matrix und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass dann $\lambda \neq 0$ gilt und dass $1/\lambda$ Eigenwert von A^{-1} ist.

Lösung: λ Eigenwert $\implies$ $Av = \lambda v$ für ein $v \neq 0$. Wäre $\lambda = 0$, dann $v \in \ker(A)$ und A wäre nicht invertierbar — Widerspruch. $Av = \lambda v \implies v = A^{-1}(\lambda v) \implies A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$.

10. (*3 Punkte*) Für einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum V mit Unterräumen $U_1, U_2 \subset V$ beweise man die Formel

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Lösung: Wähle Basis $B \subset U_1 \cap U_2$ und ergänze zu Basen $B_1 = B \cup C_1 \subset U_1$ und $B_2 = B \cup C_2 \subset U_2$. Dann ist $B \cup C_1 \cup C_2 \subset V$ erzeugend und frei. (Übungsaufgabe 8.4.)

11. (*6 Punkte*) Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der geordneten Basis $B = \{(1,0,2), (-1,1,0), (3,2,1)\}$.

(i) Geben Sie die zu B duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ an. (*3 Punkt*)

(ii) Stellen Sie das Funktional $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x - y + 4z$ in der zu B dualen Basis dar. (*3 Punkte*)

Lösung: (i), indem die Basisvektoren von B spaltenweise als Matrix aufgeschrieben werden (die hier auch B heißt); dann sind die Zeilen von B^{-1} die duale Basis.
(ii) Mit $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ist die Darstellung $f = \lambda_1 b_1^* + \lambda_2 b_2^* + \lambda_3 b_3^*$ gesucht. Setzt man in diese Gleichung die Vektoren b_i ein, so erhält man: $f(b_i) = \lambda_i$, also $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 8$ — Kenntnis der dualen Basis ist für (ii) nicht nötig.

12. (*6 Punkte*) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Berechnen Sie Spur und Determinante des Endomorphismus

$$\varphi : V \to V, \qquad p(x) \mapsto p'(x) + p(2) \cdot x^2,$$

wobei $p'(x)$ die Ableitung des Polynoms $p(x)$ bezeichnet.

Lösung: Wählen als Basis $B = \{1, x, x^2\}$, dann sind $\varphi(b_1) = x^2 = b_3$, $\varphi(b_2) = 1 + 2x^2 = b_1 + 2b_3$, $\varphi(b_3) = 2x + 4x^2 = 2b_2 + 4b_3$ und $M_{BB}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Somit $\mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}(M_{BB}(\varphi)) = 4$ und $\det(\varphi) = \det(M_{BB}(\varphi)) = 2$.

13. (*6 Punkte*) Sei $W = M_{\mathrm{symm}}(2,\mathbb{R}) := \{A \in M(2,2,\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller symmetrischen 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen. Berechnen Sie Rang und Signatur der symmetrischen Bilinearform

$$b : W \times W \to \mathbb{R}, \qquad b(A,B) = \mathrm{tr}(AB).$$

Für $M \in M(2,2,\mathbb{R})$ bezeichnen M^t die transponierte Matrix und $\mathrm{tr}(M)$ die Spur.

Lösung: Wählen Basis $S \subset W$, etwa $S = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Die Einträge der Matrix der Bilinearform sind dann $b(s_i, s_j)$, zum Beispiel $b(s_1, s_1) = \mathrm{tr}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)) =$

$\mathrm{tr}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)) = 1$; man erhält $M_{S^*S}(b) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Diese symmetrische Matrix hat Rang 3 und Signature 0.

14. (*6 Punkte*) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden komplexen Matrix:

$$B = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 13 & 4\end{pmatrix}.$$

Lösung: Charakteristisches Polynom: $\chi_B(t) = \det\left(\begin{smallmatrix}-2-t & -1\\ 13 & 4-t\end{smallmatrix}\right) = (-2-t)(4-t)+13 = t^2-2t+5$. Die Nullstellen dieses Polynoms sind die komplexen Zahlen $\lambda_1 = 1+2i$ und $\lambda_2 = 1-2i$. Eigenvektoren liegen im Kern von $B - \lambda_j E$. Etwa $B - \lambda_1 E = \left(\begin{smallmatrix}-3-2i & -1\\ 13 & 3-2i\end{smallmatrix}\right)$ mit $\left(\begin{smallmatrix}-1\\ 3+2i\end{smallmatrix}\right)$ als einem Eigenvektor für λ_1.

15. (*6 Punkte*) Wir betrachten die folgenden zwei Unterräume von $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\},$$
$$U_2 = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}((2,3,-4),(1,2,-2)).$$

Berechnen Sie Basen für die folgenden Vektorräume:

(i)	U_1	*(1 Punkt)*
(ii)	$\mathbb{R}^3/U_2$	*(2 Punkte)*
(iii)	$U_1 \cap U_2$	*(3 Punkte)*

Lösung: Analog zur Lösung der Aufgabe 15 der vorigen Klausur.