Übungsaufgaben Mathematik für Sonderpädagogen I

1. Berechne $1/72$ in $\mathbb{Z}/1001\mathbb{Z}$. Berechne die Potenz 4^{103} in $\mathbb{Z}/203\mathbb{Z}$.

2. Stelle $1376,375$ im Binärsystem ($g = 2$) dar. Stelle $5,5$ zur Basis $g = 3$ dar.

3. Ist die Zahl $11\ldots122\ldots233\ldots3$ (hundert Ziffern 1, danach hundert Ziffern 2, dann hundert Ziffern 3) durch 7 teilbar?

4. Wie viele Abbildungen $\{1,2,3\} \to \{1,2\}$ gibt es? Wie viele injektive Abbildungen $\{1,2\} \to \{1,2,3,4\}$ gibt es?

5. Bestimmen Sie die Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1,2,\ldots,k\} \to \{1,2,\ldots,n\}$. Außerdem die Anzahl der Möglichkeiten, k aus n Dingen auszuwählen, wenn man wieder zurücklegt (also Wiederholungen erlaubt sind).

6. Berechne die Chance, bei fünf Karten eines Standardkartenspiels (52 Karten) die folgenden Kombinationen zu erhalten: Flush, Vierling, Straße, Full House, Drilling, Pärchen.

7. Finde eine Formel für die Summe der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, wobei k von 0 bis n läuft:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Beweise die Formel und interpretiere sie.
[Antwort: Die Summe ist 2^n. Man kann die binomische Formel $(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ benutzen. Alternativ mit $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ — das ist die Vorschrift des Pascalschen Dreiecks): $\sum_k \binom{n+1}{k} = \sum_k \binom{n}{k} + \sum_k \binom{n}{k-1} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Wenn die Formel für n gilt, dann also auch für $n+1$. Sie ist evident für $n = 1$, also gilt sie für alle n (Induktion).
Interpretation: Gegeben eine n-elementige Menge N, dann ist $\binom{n}{k}$ gerade die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von N. Die Summe zählt also alle Teilmengen von N, inklusive der leeren Menge ($k = 0$) und ganz N ($k = n$). Die Anzahl aller Teilmengen ist aber 2^n (die Mächtigkeit der Potenzmenge von N).]

8. Wie viele Zahlen gibt es zwischen 1 und $N = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, die einen gemeinsamen Teiler mit N haben?
[Antwort: $257 - 99 + 17 - 1 = 174$.]

9. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) Eine faire Münze wird n Mal nacheinander geworfen. Wie groß ist die Chance, dass dabei zweimal nacheinander Kopf fällt?
b) Eine faire Münze wird n Mal nacheinander geworfen. Wie groß ist die Chance, dass dabei zwei Köpfe in der Serie auftauchen?
c) n faire Münzen werden auf den Boden geworfen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Köpfe darunter sind?

Zusatzaufgaben

10. Wie viele „Wörter“ kann man aus `MISSISSIPPI` bilden?
[Antwort: $11!/4!4!2! = 34650$.]

11. Finden Sie heraus, wie sich die Restklassen der Potenzen 2^n modulo 5 verhalten, also die $2^n \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Können Sie Ihre Formel beweisen?

12. Stellen Sie die Dezimalzahl 39813 in den Basen 3 und 5 dar.
[Antwort: 2000121120 zur Basis 3; 2233223 zur Basis 5.]

13. In welchen Basen hat der Bruch $5/6$ eine endliche Nachkommadarstellung?

14. Geben Sie Bijektionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sowie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an.

15. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln mit vier Standardwürfeln die Augensumme 7 zu erhalten. Weiterhin die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der vier Würfel 36 ist.
[Antwort: 1,5% sowie 2,7%.]

16. Zwei Spieler haben jeder einen gemischten, verdeckten Kartenstapel, der aus Karten mit den Zahlen von 1 bis n besteht. Sie decken abwechselnd eine Karte auf. Spieler A gewinnt, wenn dabei irgendwann einmal die gleiche Nummer erscheint; B gewinnt, wenn alle Karten aufgedeckt sind, ohne dass das passiert.
Wie sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten bei diesem Spiel für kleines n? Haben Sie eine Vermutung für beliebiges n?

17. Wir betrachten die Menge $D = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Was ist die Anzahl aller fünfelementigen Teilmengen von D, die a oder b enthalten?
[Antwort: 50.]

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Immatrikulationsnummer:

Probeklausur (Mathematik für Sonderpädagogen I)

Für jede Aufgabe gibt es 12 Punkte. Die ersten vier Aufgaben sind Multiple-Choice-Aufgaben; dabei gibt es Minuspunkte für falsche Antworten, negative Gesamtpunkte werden aber *nicht* in andere Aufgaben übertragen.
Taschenrechner und andere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Aufgabe 1. (*12 Punkte*) Welche der folgenden Zahlen sind prim?

79	ja	nein	97	ja	nein	323	ja	nein
1007	ja	nein	1009	ja	nein	20581	ja	nein

Aufgabe 2. (*12 Punkte*) Wir betrachten die folgende Zahl in Binärdarstellung:

$$b = 10.01010101.01010111.01010101.01010101.00110101.00010101.01010110$$

Durch welche der folgenden Zahlen ist b ohne Rest teilbar?

2	ja	nein	3	ja	nein
4	ja	nein	5	ja	nein

Aufgabe 3. (*12 Punkte*) Wir betrachten die folgenden Abbildungen:

$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\quad x \mapsto \begin{cases} x+1, & x \text{ gerade} \\ x-3, & x \text{ ungerade} \end{cases}$

$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\quad g(n)$ ist die Zahl, die aus n durch Schreiben der Ziffern (im Dezimalsystem) in umgekehrter Reihenfolge entsteht, dabei werden führende Nullen weglassen

$p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/9$, $\quad k \mapsto \overline{k}$

$q\colon \mathbb{Z}/8 \to \mathbb{Z}/8$, $\quad \overline{k} \mapsto \overline{3k}$

Die Abbildung f ist injektiv ja nein, surjektiv ja nein, bijektiv ja nein.
Die Abbildung g ist injektiv ja nein, surjektiv ja nein, bijektiv ja nein.
Die Abbildung p ist injektiv ja nein, surjektiv ja nein, bijektiv ja nein.
Die Abbildung q ist injektiv ja nein, surjektiv ja nein, bijektiv ja nein.

Aufgabe 4. (*12 Punkte*) Schüler der Sekundarstufe I sollen beweisen:

> Wenn man drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen multipliziert, dann ist das Produkt durch 6 teilbar.

Drei der Antworten waren:

Katja: „Ein Vielfaches von 6 muss die Teiler 2 und 3 besitzen. Wenn man drei aufeinanderfolgende Zahlen hat, dann ist eine davon ein Vielfaches von 3. Außerdem ist mindestens eine Zahl gerade, und gerade Zahlen sind Vielfache von 2.
Wenn man nun die drei aufeinanderfolgenden Zahlen multipliziert, muss das Ergebnis mindestens einmal den Teiler 3 und einmal den Teiler 2 besitzen.“

Leon: „$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 = 6 \cdot 4$; $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 = 6 \cdot 10$; $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 = 6 \cdot 20$; $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210 = 6 \cdot 35$; $6 \cdot 7 \cdot 8 = 336 = 6 \cdot 56$; $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 = 6 \cdot 84$“

Maria: „Für eine beliebige ganze Zahl n ist $n(n+1)(n+2) = (n^2+n)(n+2) = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n$. Kürzen der n's ergibt $1 + 1 + 2 + 2 = 6$.“

Kreuzen Sie für jeden Ansatz an, ob er einen korrekten Beweis liefert.

Katjas $\boxed{\text{ja}}$ $\boxed{\text{nein}}$ Leons $\boxed{\text{ja}}$ $\boxed{\text{nein}}$ Marias $\boxed{\text{ja}}$ $\boxed{\text{nein}}$

Aufgabe 5. (*12 Punkte*) Ein ambitionierter Pharao möchte sich auf das Leben nach dem Tod mit dem Bau dreier Pyramiden vorbereiten. Nach Überzeugung der Hohepriester gelingt das am Besten, wenn die Pyramiden Seitenlängen von 440 Ellen, 412 Ellen und 240 Ellen (bei quadratischer Grundfläche) haben. Jede der drei Pyramiden soll aus Granit- und Basaltwürfeln der gleichen Größe gebaut werden. Was ist die größtmögliche Kantenlänge für die Steinwürfel?

Aufgabe 6. (*12 Punkte*) Beim 6-aus-49 Spiel eines Lotto-Unternehmens gibt es eine Million Euro für den richtigen Tipp. Um Kunden zu halten, bietet ein privates Spielcasino eine Million Euro denjenigen, die das folgende Spiel gewinnen:
In einer Urne sind 24 graue Kugeln sowie fünf bunte Kugeln mit den Buchstaben B, G, I, N, O. Man zieht fünf Mal und gewinnt, wenn man die Buchstabenkugeln in der richtigen Reihenfolge (BINGO) findet.
Bei welchem Spiel ist es leichter, den Preis zugewinnen?

Klausuranforderungen

Zahlentheorie

Größter gemeinsamer Teiler. Kleinstes gemeinsames Vielfaches. Primzahlen. Primfaktorzerlegung. Stellenwertsysteme. Teilbarkeitsregeln. Restklassen (Rechnen in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

(Mengenlehre)

Mengen. Abbildungen. Injektionen, Surjektionen, Bijektionen.
(Wird nicht explizit gefragt, aber Sie müssen diese Begriffe alle verstanden haben.)

Kombinatorik

Permutationen ($n!$), Permutationen mit Wiederholungen.
Anzahl der Möglichkeiten, k aus n auszuwählen:

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
mit Anordnung	n^k	$n^{\underline{k}}$
ohne Anordnung	$\frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

(Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Grundgesamtheit. Gleichverteilung. Erwartungswert. Varianz.
(Sie müssen einfache diskrete Wahrscheinlickeiten berechnen können, ebenso einfache Erwartungswerte.)

Folgen

Angabe von Folgen durch explizite Formel, Rekursion, Tabelle, Graph.
Eigenschaften: Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz (Grenzwert einer Folge).
Geometrische Reihe, Exponentialreihe, harmonische Reihe.

Funktionen

Angabe von Funktionen durch explizite Formel und Graph.
Eigenschaften: Monotonie, Beschränktheit; Injektivität usw.; Stetigkeit.
Polynome, Potenzfunktionen (Potenzgesetze), Logarithmen.

Differenzierbarkeit

Ableitung in einem Punkt: Tangentenanstieg (Differentialquotient) als Grenzwert der Sekantenanstiege (Differenzenquotienten).
Ableitung als Funktion ($f'(x)$). Anwendung von Leibniz- und Kettenregel.
Interpretation der Ableitung (Extremwerte, Wachstumsraten).

Übungsaufgaben Mathematik für Sonderpädagogen II

David Ploog; raum g012; email: ploog@math.uni-hannover.de

1. Wir definieren eine Zahlenfolge a_n durch $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 3$. Listen Sie die Folgenglieder bis a_{12} auf. Finden Sie Formeln für

$$\mathrm{ggT}(a_n, a_m), \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} i a_i, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_i^2.$$

Versuchen Sie, Ihre Formeln zu beweisen!

2. Zeigen Sie, dass die Folge $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

3. Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{4}{x_n}}{2}$$

und Startwert $x_0 = 1$. Wogegen konvergiert diese Folge? Was passiert, wenn Sie den Startwert verändern? Welchen Grenzwert erhalten Sie, wenn Sie die 4 durch 5 ersetzen?

4. Wie würden Sie definieren, dass eine Folge (a_n) gegen ∞ (unendlich) konvergiert? Hat eine positive, unbeschränkte Folge immer den Grenzwert ∞ in Ihrer Definition? Was ist mit einer positiven, monoton wachsenden Folge?

5. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (Rechnung oder Beweis):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n+2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{7^{2n+1}}$$

6. Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: f ist monoton wachsend, $f(3) = 8$ und $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Ist Ihre Lösung eindeutig?

7. Zeichnen Sie die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass g stetig in 0 ist.

8. Zeigen Sie, dass die Reihe $e(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert:

$$e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Finden Sie eine Formel für $e(x+y)$ — können Sie damit beweisen, dass e stetig ist?

9. Berechnen Sie die Ableitung von x^n für $n \in \mathbb{N}$. Was ist mit $n < 0$? Können Sie mit ihrer Formel auch die Ableitung von $e(x)$ aus Aufgabe 8 finden?

Übungsaufgaben Mathematik für Sonderpädagogen II

David Ploog; raum g012; email: ploog@math.uni-hannover.de

10. Bestimmen Sie die Ableitung von $\sqrt{x}$. Zeichnen Sie beide Funktionen und interpretieren Sie die Ableitung grafisch.

11. Finden Sie eine differenzierbare Funktion f, so dass $f'(x) = 0$ für ein x gilt, f dort aber weder Maximum noch Minimum hat. Besitzt x dennoch eine geometrische Bedeutung?

12. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $\ln(x)$. (Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion e^x, d.h. $\ln(e^x) = x$ und $e^{\ln(x)} = x$.)

13. Strontium 90 (^{90}Sr) ist ein radioaktives Isotop des Elementes Strontium, es hat eine Halbwertszeit von $T = 28,8$ Jahren. Bezeichnet $s(t)$ die Menge von ^{90}Sr (an einem Ort) zur Zeit t, dann ist also $s(t+T) = s(t)/2$. Finden Sie eine Formel, die den radioaktiven Zerfall beschreibt. (Hinweis: Potenzgesetze.)
Wie lange dauert es, bis von einer Anfangsmenge von 100 kg ^{90}Sr nur noch 1 kg übrig ist?

14. Ein Wucherer möchte 10.000 Euro verleihen und nach sieben Jahren seinen Einsatz doppelt zurückerhalten. Welchen Zinssatz muss er fordern?
Nach einiger Zeit wurde leider ein Maximalzinssatz von 6,5 % auf derartige Darlehen festgelegt. Wie lange muss er jetzt sein Geld verleihen, um es zu verdoppeln?
Was ändert sich, wenn andere Summen auf dem Spiel stehen?

15. Ein Handwerksbetrieb soll für eine Veranstaltung fragwürdiger Natur eine sehr große Anzahl an zylinderförmigen Tonnen mit jeweils genau einem Kubikmeter Inhalt herstellen. Bei welchen Ausmaßen sind die Materialkosten am geringsten?

16. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_3^9 \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{und} \qquad \int_3^9 \frac{1}{t^2}\,dt.$$

Was passiert, wenn Sie die obere Grenze nach unendlich gehen lassen?

17. Ermitteln Sie die Fläche, die durch die Graphen von $f(x) = 6 - x^2$ und $g(x) = x^4/8$ eingeschlossen wird.

18. Berechnen Sie mit partieller Integration

$$\int_0^3 x^2\, 2^x\,dx.$$

19. Definieren Sie, wann ein Integral der Form $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergiert und bestimmen Sie die Werte der konvergenten Integrale unter

$$\int_1^\infty \frac{t+1}{t^2}\,dt, \qquad \int_1^\infty \frac{t}{e^t}\,dt, \qquad \int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt.$$

1	2	3	4	5	$\sum_{1\text{-}5}$	6	7	8	9	10	$\sum_{1\text{-}10}$

Immatrikulationsnummer:

Klausur (Mathematik für Sonderpädagogen, 2011)

Aufgabe 1. (*4 Punkte*) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Es gibt unendlich viele Primzahlen.	ja	nein
Eine Quadratzahl lässt niemals Rest 3 bei Teilung durch 4.	ja	nein
Die Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + 214$ ist durch 45 teilbar.	ja	nein
Die Summe $1 + 3 + 9 + 81 + \cdots + 3^{17}$ ist durch 13 teilbar.	ja	nein

Aufgabe 2. (*4 Punkte*) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

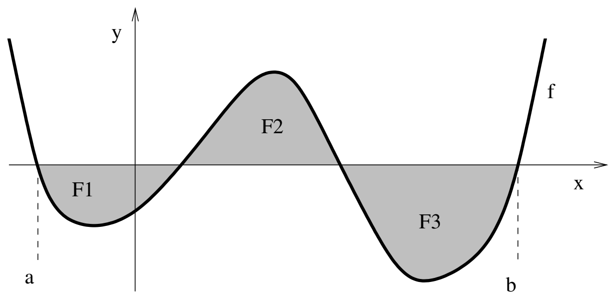
Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.	ja	nein
Jede beschränkte und konvergente Folge ist monoton.	ja	nein
Jede konvergente und monotone Folge ist beschränkt.	ja	nein
Jede monotone, nicht konvergente Folge ist unbeschränkt.	ja	nein

Aufgabe 3. (*4 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

f ist stetig.	ja	nein	f ist injektiv.	ja	nein
f ist monoton.	ja	nein	f ist beschränkt.	ja	nein

Aufgabe 4. (*1 Punkte*) In der Zeichnung sind die drei Flächen markiert; ihre Flächeninhalte seien F_1, F_2, F_3. Welche Formel gibt den korrekten Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ an? (Kreuzen Sie genau ein Kästchen an.)

- ☐ $F_1 + F_2 + F_3$
- ☐ $|F_1 + F_2 + F_3|$
- ☐ $F_1 - F_2 - F_3$
- ☐ $F_2 - F_1 - F_3$
- ☐ $F_3 - F_1 - F_2$



Aufgabe 5. (*7 Punkte*) Füllen Sie den folgenden Lückentext aus:

Die Mathematiker ………… und ………… erfanden im …… Jahrhundert die Differential- und Integralrechnung.

Außer dem allgegenwärtigen Dezimalsystem zur Darstellung von Zahlen sind/waren auch folgende Stellenwertsysteme im Gebrauch:
Basis ……, benutzt in ……………………
Basis ……, benutzt in ……………………

Aufgabe 6. (*2+5+5 Punkte*) Eine Restklasse $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ heißt *invertierbar*, wenn $\overline{1}/\overline{k}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ existiert.
a) Welche Restklassen aus $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sind invertierbar?
b) Ist $\overline{53}$ in $\mathbb{Z}/306\mathbb{Z}$ invertierbar? Wenn ja, berechne man $\overline{1}/\overline{53}$ in $\mathbb{Z}/306$.
c) Wie viele Restklassen sind in $\mathbb{Z}/306\mathbb{Z}$ invertierbar?

Aufgabe 7. (*12 Punkte*) Die folgende Zahl ist im 9-adischen System aufgeschrieben:

$$A = 748.240.324.411.302.$$

Geben Sie die Reste von A bei Teilung durch 8, durch 9, durch 10 und durch 13 an!

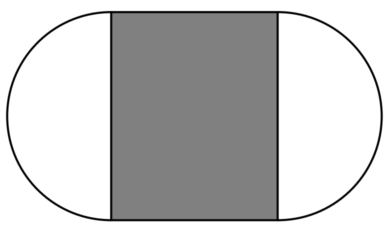
Aufgabe 8. (*12 Punkte*) Drei eingefleischte Glücksspieler treffen sich, um um einen größeren Betrag zu spielen. Jeder spielt nach eigenen Regeln.

a) Anna bringt einen Beutel mit, der die Buchstaben A,A,A,N,N enthält. Sie gewinnt, wenn sie beim Ziehen von vier Buchstaben ihren Namen auslegt.
b) Berta bringt ein Standardkartenspiel mit (52 Karten) und gewinnt, wenn sie drei Karten zieht und wenigstens ein rotes As (Karo-As oder Herz-As) findet.
c) Carola würfelt mit vier Würfeln und gewinnt, wenn die Summe der Augenzahlen genau 13 ist.

Berechnen Sie, wessen Spiel die größte bzw. kleinste Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

Aufgabe 9. (*4+6+6 Punkte*)
a) Bestimmen Sie mit dem Differentialquotienten die Ableitung von $f(x) = x^3$ bei $x = 2$.
b) Bestimmen Sie die Ableitung von $2x^2e^x \sin(x^2)$.
c) Berechnen Sie $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.

Aufgabe 10. (*8 Punkte*) Eine 400 Meter-Laufbahn, bestehend aus zwei parallelen Geraden mit zwei angesetzten Halbkreisen (siehe Abbildung), soll so angelegt werden, dass der Inhalt des Rechteckes zwischen den Geraden möglichst groß wird. Bestimmen Sie die Ausmaße des Rechtecks.



Taschenrechner und andere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Bei den Aufgaben der ersten Seite (Aufgaben 1 bis 5) gibt es für falsche Antworten einen Minuspunkt. Plus- und Minuspunkte der Aufgaben 1–5 werden untereinander verrechnet. Es gibt für diesen Block aber mindestens 0 Punkte (das bedeutet, dass fehlerhaftes Ankreuzen Lösungen im Rechenteil nicht beeinträchtigen kann).

Klausur (Mathematik Sonderpädagogen, 2011) — Lösungen

Aufgabe 1. (*4 Punkte*) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Es gibt unendlich viele Primzahlen.	ja	nein
Eine Quadratzahl lässt niemals Rest 3 bei Teilung durch 4.	ja	nein
Die Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + 214$ ist durch 45 teilbar.	ja	nein
Die Summe $1 + 3 + 9 + 81 + \cdots + 3^{17}$ ist durch 13 teilbar.	ja	nein

Lösung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Quadratzahlen lassen nur die Reste 0 und 1 modulo 4, also niemals 3.
Es ist $\sum_{i=1}^{214} = 214 \cdot 215/2$ und keiner der Faktoren ist durch 3 teilbar.
Es ist $\sum_{i=0}^{17} 3^i = (1 - 3^{18})/(1 - 3) = (3^{18} - 1)/2$. Wegen $3^3 \equiv 1 \bmod 13$ ist $3^{18} \equiv 1$, also $13 \mid \sum_{i=0}^{17} 3^i$.

Aufgabe 2. (*4 Punkte*) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.	ja	nein
Jede beschränkte und konvergente Folge ist monoton.	ja	nein
Jede konvergente und monotone Folge ist beschränkt.	ja	nein
Jede monotone, nicht konvergente Folge ist unbeschränkt.	ja	nein

Lösung: Beschränkte und monotone Folgen konvergieren.
Die Folge $a_n = (-1)^n/n$ ist beschränkt und konvergiert gegen 0, ist aber nicht monoton.
Jede konvergent Folge ist beschränkt (Monotonie wird gar nicht gebraucht).
Eine monotone, nicht konvergente Folge steigt/fällt über jede obere/untere Schranke.

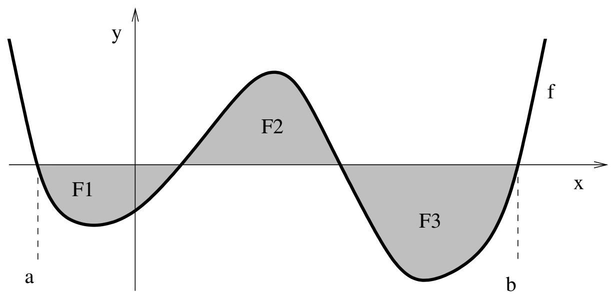
Aufgabe 3. (*4 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

f ist stetig.	ja	nein	f ist injektiv.	ja	nein
f ist monoton.	ja	nein	f ist beschränkt.	ja	nein

Lösung: Für die Funktion f ist entweder $f'(x) > 0$ für alle x, oder $f'(x) < 0$ für alle x. Im ersten Fall ist f monoton steigend, im zweiten monoton fallend, also immer monoton. Monotone Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind injektiv. Differenzierbare Funktionen sind immer stetig. Die Funktion $f(x) = x$ ist differenzierbar mit $f'(x) = 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber f ist nicht beschränkt.

Aufgabe 4. (*1 Punkte*) In der Zeichnung sind die drei Flächen markiert; ihre Flächeninhalte seien F_1, F_2, F_3. Welche Formel gibt den korrekten Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ an? (Kreuzen Sie genau ein Kästchen an.)

- ☐ $F_1 + F_2 + F_3$
- ☐ $|F_1 + F_2 + F_3|$
- ☐ $F_1 - F_2 - F_3$
- ☐ $F_2 - F_1 - F_3$
- ☐ $F_3 - F_1 - F_2$



Lösung: Das Integral berechnet den orientierten Flächeninhalt; die Anteile unterhalb der x-Achse werden negativ gezählt. Also kommt $F_2 - F_1 - F_3$ heraus.

Aufgabe 6. (*2+5+5 Punkte*) Eine Restklasse $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ heißt *invertierbar*, wenn $\overline{1}/\overline{k}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ existiert.
a) Welche Restklassen aus $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sind invertierbar?
b) Ist $\overline{53}$ in $\mathbb{Z}/306\mathbb{Z}$ invertierbar? Wenn ja, berechne man $\overline{1}/\overline{53}$ in $\mathbb{Z}/306$.
c) Wie viele Restklassen sind in $\mathbb{Z}/306\mathbb{Z}$ invertierbar?

Lösung: a) Nur $\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}$ sind invertierbar in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ — es sind diejnigen Restklassen $\overline{n}$ mit $\mathrm{ggT}(n, 12) = 1$.
b) Mit Euklidischem Algorithmus, Lösung ist $-\overline{127} = \overline{179}$.
c) Suchen alle Zahlen n zwischen 1 und 306 mit $\mathrm{ggT}(n, 306) = 1$. Zählen alle Zahlen mit $\mathrm{ggT}(n, 306) > 1$ durch Inklusion-Exklusion: $306 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17$. Müssen Vielfache von 2, 3 und 17 betrachten, davon gibt es 306/2, 306/3 und 306/17. Anschließend müssen die Vielfachen von $2 \cdot 3$ abgezogen werden usw.:

$$\frac{306}{2} + \frac{306}{3} + \frac{306}{17} - \frac{306}{6} - \frac{306}{34} - \frac{306}{51} + \frac{306}{102} = 153 + 102 + 18 - 51 - 9 - 6 - 3 = 273 - 66 + 3 = 210,$$

also sind 306-210=96 Restklassen invertierbar.

Aufgabe 7. (*12 Punkte*) Die folgende Zahl ist im 9-adischen System aufgeschrieben:

$$A = 748.240.324.411.302.$$

Geben Sie die Reste von A bei Teilung durch 8, durch 9, durch 10 und durch 13 an!

Lösung: Betrachten die Reste der Neunerpotenzen modulo 8, 9, 10, 13:

i	9^i	mod 8	mod 9	mod 10	mod 13
0	1	1	1	1	1
1	9	1	0	-1	$9 = -4$
2	81	1	0	1	3
3	9^3	1	0	-1	1
0	9^4	1	0	1	$9 = -4$

Die Quersumme von A ist 45, also lässt A den Rest 5 bei Teilung durch 8.
Die Einerziffer von A ist 2, also lässt A den Rest 2 bei Teilung durch 9.
Die alternierende Quersumme von A ist 19, also lässt A den Rest 9 bei Teilung durch 10.
Für den Rest bei Teilung durch 13 müssen die Ziffern immer wieder mit 1, dann mit -4 (oder 9), dann mit 3 multipliziert werden:

$$1 \cdot (8 + 0 + 4 + 1 + 2) - 4(4 + 4 + 2 + 1 + 0) + 3(7 + 2 + 3 + 4 + 3) = 15 - 4 \cdot 11 + 3 \cdot 19 = 15 - 44 + 57 = 28,$$

also lässt A den Rest 2 bei Teilung durch 13.

Aufgabe 8. (*12 Punkte*) Drei eingefleischte Glücksspieler treffen sich, um um einen größeren Betrag zu spielen. Jeder spielt nach eigenen Regeln.

a) Anna bringt einen Beutel mit, der die Buchstaben A,A,A,N,N enthält. Sie gewinnt, wenn sie beim Ziehen von vier Buchstaben ihren Namen auslegt.
b) Berta bringt ein Standardkartenspiel mit (52 Karten) und gewinnt, wenn sie drei Karten zieht und wenigstens ein rotes As (Karo-As oder Herz-As) findet.
c) Carola würfelt mit vier Würfeln und gewinnt, wenn die Summe der Augenzahlen genau 13 ist.

Berechnen Sie, wessen Spiel die größte bzw. kleinste Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

Lösung: a) Es gibt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ Möglichkeiten, vier Buchstaben aus dem Sack zu ziehen (keine Anordnung, ohne Zurücklegen). Davon sind günstig: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$ (für das erste A gibt es drei Chancen, für das erste N zwei usw.) Die Wahrscheinlichkeit P_A ist also $12/120 = 1/10$.
Alternativ: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = 6/60 = 1/10$.

b) Es gibt $\binom{52}{3}$ Weisen, drei Karten zu ziehen. Davon haben $\binom{2}{1} \cdot \binom{50}{2}$ genau ein rotes As und $\binom{2}{2} \cdot 50$ beide roten Asse. Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit also $P_B = (2 \cdot 50 \cdot 49/2 + 50)/(52 \cdot 51 \cdot 50/6) = 25/221$.
Alternativ: Unter den $\binom{52}{3}$ Tripeln gibt es $\binom{50}{2}$, die keines der beide roten Asse enthalten. Die Wahrscheinlichkeit P_B ist also

$$1 - \binom{50}{3} \Big/ \binom{52}{3} = 1 - \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{52 \cdot 51 \cdot 50} = 1 - \frac{49 \cdot 4}{17 \cdot 13} = \frac{221 - 196}{221} = \frac{25}{221}.$$

c) 6^4 mögliche Ergebnisse insgesamt, unter Berücksichtigung der Reihenfolge.
Liste aller Möglichkeiten, 13 als Summe zu erhalten (ohne Reihenfolge): 6511, 6421, 6331, 6322, 5521, 5431, 5422, 5332, 4441, 4432, 4333. Anzahl der Möglichkeiten, 13 zu erhalten (mit Reihenfolge) — $4! = 24$ Permutationen, falls alle vier Zahlen verschieden sind; $12 = 4!/2!$ bei einem Paar und $4 = 4!/4!$ bei einem Dreier:

$$24 \cdot 2 + 12 \cdot 7 + 4 \cdot 2 = 48 + 96 + 8 = 140,$$

die Wahrscheinlichkeit ist also $140/6^4 = 35/9 \cdot 36$.
Mit $P_A = \frac{1}{10}$, $P_B = \frac{25}{221}$ und $P_C = \frac{35}{9 \cdot 36}$ ist $P_A < P_B$ (wegen $221 < 10 \cdot 25 = 250$), $P_B > P_C$ (wegen $25 \cdot 9 \cdot 36 = 8100 > 7735 = 221 \cdot 35$) und $P_A < P_C$ (wegen $9 \cdot 36 = 324 < 350 = 10 \cdot 35$).

Aufgabe 9. (*4+6+6 Punkte*)
a) Bestimmen Sie mit dem Differentialquotienten die Ableitung von $f(x) = x^3$ bei $x = 2$.
b) Bestimmen Sie die Ableitung von $2x^2 e^x \sin(x^2)$.
c) Berechnen Sie $\int_0^\infty xe^{-x}\, dx$.

Lösung: a) Mit der Definition des Differentialquotienten und $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ist

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8 + 3 \cdot 4h + 3 \cdot 2h^2 + h^3 - 8}{h} = \lim_{h \to 0} (12 + 6h + h^2) = 12.$$

b) Die Funktion ist ein Produkt aus den drei Faktoren x^2, e^x und $\sin(x^2)$, also muss die Leibniz-Regel doppelt angewendet werden. Die ersten beiden Faktoren sind einfach abzuleiten, beim dritten ist die Kettenregel nötig: die Ableitung von $\sin(x^2)$ ist $\cos(x^2) \cdot 2x$. Insgesamt ist die Ableitung

$$2(2x \cdot e^x \sin(x^2) + x^2 \cdot (e^x \sin(x^2) + e^x \cos(x^2) \cdot 2x)) = 2xe^x((2 + x^2)\sin(x^2) + 2\cos(x^2)).$$

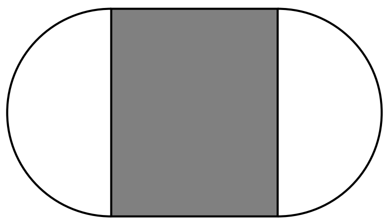
c) Zuerst ist eine Stammfunktion von xe^{-x} zu bestimmen; dies geschieht mit partieller Integration ($xe^{-x} = f(x) \cdot g'(x)$ mit $f(x) = x$ und $g'(x) = e^{-x}$, also $f'(x) = 1$ und etwa $g(x) = -e^{-x}$). Eine Stammfunktion von xe^{-x} ist also $-xe^{-x} - \int(-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x} =: S(x)$. Ein bestimmtes Integral von 0 bis $b > 0$ ist dann

$$\int_0^b xe^{-x}\, dx = S(b) - S(0) = -(b+1)e^{-b} - (-e^0) = 1 - (b+1)e^{-b}.$$

Für sehr große b geht $(b+1)e^{-b} = \frac{b+1}{e^b}$ gegen 0, also ist

$$\int_0^\infty xe^{-x}\, dx = \lim_{b \to \infty} (S(b) - S(0)) = \lim_{b \to \infty} (1 - (b+1)^e - b) = 1.$$

Aufgabe 10. (*8 Punkte*) Eine 400 Meter-Laufbahn, bestehend aus zwei parallelen Geraden mit zwei angesetzten Halbkreisen (siehe Abbildung), soll so angelegt werden, dass der Inhalt des Rechteckes zwischen den Geraden möglichst groß wird. Bestimmen Sie die Ausmaße des Rechtecks.



Lösung: Das Rechteck habe Breite (der gerade Teil der Laufbahn) b und Höhe h. Die zu maximierende Fläche ist $A = bh$. Der Umfang ist bekannt: $400 = 2b + \pi h$. Damit kann man eine der beiden Variablen durch die andere ausdrücken und findet $A(h) = (200 - \frac{\pi}{2}h)h = -\frac{\pi}{2}h^2 + 200h$. Also $A'(h) = -\pi h + 200$. Ein Maximum kann nur an der Nullstelle $h_0 = 200/\pi$ von $A'(h)$ vorliegen. Damit ist $b_0 = 200 - \frac{\pi}{2}h_0 = 200 - 100 = 100$. Das gesuchte Rechteck hat eine Breite von 200 Metern und eine Höhe von $100/\pi$ Metern.